

Einsicht in das dezimale Stellenwertsystem

***Vergleichende Lernstandserhebung am Beginn der vierten
Schulstufe***

BACHELORARBEIT

aus Mathematik und Schulpraktischen Studien

zur Erlangung des akademischen Grades

Bachelor of Education (BEd)

an der

Kirchlichen Pädagogischen Hochschule Wien/Krems

eingereicht von

Birgit Mühlgassner

Matrikelnummer.: 1094314

Wien, März 2014

ThemenstellerInnen:

Mag. Dr. Michael Gaidoschik / Klamecker Monika VOL Dipl.-Päd. MA.

Kurzzusammenfassung

In der vorliegenden Bachelorarbeit wird der Frage nachgegangen, welches Verständnis sechs ausgewählte Schülerinnen und Schüler der Praxisvolksschule Strebersdorf am Beginn der vierten Schulstufe für das dezimale Stellenwertsystem entwickelt haben. Außerdem wird analysiert, inwiefern diesbezüglich Unterschiede zwischen Schülerinnen und Schülern, die in Mathematik gemäß dem Urteil ihrer Lehrkraft „leistungsstark“ sind, und solchen, die gemäß dem Urteil ihrer Lehrkraft „leistungsschwach“ sind, auftreten.

Den Fragestellungen wird durch genaue Analyse der halbstandardisierten Interviews, die nach der klinisch revidierten Methode durchgeführt wurden, nachgegangen.

Die Ergebnisse zeigen, dass es in vielen Fällen schwierig ist, Gewissheit über die Qualität des bereits aufgebauten Verständnisses der Kinder zu erlangen. Ein Kind der leistungsstarken Gruppe hat bereits ein tragfähiges Stellenwertverständnis entwickelt, bei den zwei übrigen Kindern kann darüber nur in einzelnen Teilbereichen eine fundierte Aussage gemacht werden. Die drei leistungsschwachen Kinder zeigen hingegen alle in unterschiedlichen Teilbereichen deutliche Defizite.

Summary

This bachelor thesis discusses the understanding of the decimal place-value system six different pupils (both genders represented) have developed at the beginning of fourth grade elementary school "Praxisvolksschule Strebersdorf". Furthermore the differences between top-performing and under-performing pupils, according to the opinion of their teacher, are analyzed.

The outcome is achieved by detailed analysis of the semi-structured interviews, based on the model of the clinically revised method.

The results proof, that most of the time it is hardly possible to get a clear insight of the real level of understanding each pupil has reached. One of the top-performing group shows efficient comprehension of the considered matter. This statement can't be made for the remaining two regarding all of the containing subareas. All of the pupils representing the under-performing group reveal explicit deficiencies in different subareas.

Vorwort

Bereits seit meiner Kindheit ist mein Interesse für Mathematik sehr groß. Das Rechnen in nichtdekadischen Stellenwertsystemen während unterschiedlicher Lehrveranstaltungen meines bisherigen Studiums verdeutlichte mir, dass das Verständnis des Dezimalsystems für Kinder bei weitem nicht so selbstverständlich ist, wie es für uns Erwachsene scheint. Für Schülerinnen und Schüler der Grundschule ist die Zehnerbündelung genauso unbekannt wie beispielsweise eine Sechserbündelung für Erwachsene und bereitet den Kindern deshalb ähnliche Schwierigkeiten. Durch diese Einsicht und die Seminare von Mag. Dr. Michael Gaidoschik wurde mein Interesse an den Denkwegen der Kinder – besonders in Bezug auf das Stellenwertsystem – geweckt.

Deshalb freut es mich sehr, dass ich diese Arbeit in den Studienfächern Fachdidaktik Mathematik, betreut von Mag. Dr. Michael Gaidoschik, und Schulpraktische Studien, betreut von Klamecker Monika VOL Dipl.-Päd. MA., schreiben durfte.

Besonderen Dank möchte ich an dieser Stelle meinem Lebensgefährten, meiner Familie und meinen Freunden aussprechen, die mich im Laufe der Entstehung dieser Arbeit mit viel positiver Energie durch alle Höhen und Tiefen begleitet haben. Ohne ihre große und liebevolle Unterstützung hätte ich es wohl nicht geschafft, diese Aufgabe zu vollenden.

Außerdem möchte ich mich bei den Kindern bedanken, die freudig mitgearbeitet und mir dadurch Einblicke in ihre Denkweisen ermöglicht haben. Mit ihnen zusammenarbeiten zu dürfen, war für mich eine tolle und sehr lehrreiche Erfahrung. Abgesehen davon möchte ich mich bei der Lehrperson bedanken, die mir meine Fragen zu ihrem Unterricht offen und vertrauensvoll beantwortet hat.

Wien, im März 2014

BIRGIT MÜHLGASSNER

Inhalt

1	PROBLEMAUFRISS UND ZIELSTELLUNGEN.....	10
2	DAS DEZIMALE STELLENWERTSYSTEM.....	12
2.1	Einleitung	12
2.2	Geschichte der Zahlensysteme	12
2.2.1	Das erste Rechnen.....	12
2.2.2	Die Mathematik ausgewählter früher Hochkulturen	13
2.2.3	Die römische Zahlenschrift.....	15
2.2.4	Das dezimale Stellenwertsystem.....	16
2.3	Die Prinzipien eines Stellenwertsystems	17
2.3.1	Das Prinzip der fortgesetzten Bündelung	17
2.3.2	Das Stellenwert- oder Positionsprinzip.....	18
2.3.3	Interpretation von in Ziffern notierten mehrstelligen Zahlen	19
2.4	Benennung von Zahlwörtern in der deutschen Sprache	19
2.5	Resümee.....	20
3	AUFBAU MATHEMATISCHEN VERSTÄNDNISSES	22
3.1	Einleitung	22
3.2	Mathematisches Wissen.....	22
3.2.1	Formen des Wissens nach Piaget.....	22
3.2.2	Konzeptuelles und prozedurales Wissen	24
3.2.3	Informelles und formelles Wissen.....	26
3.3	Entwicklungspsychologische Hintergründe des mathematischen Lernens und Lehrens	26
3.3.1	Die konstruktivistische Sichtweise.....	27
3.3.2	Die Repräsentationsformen nach Bruner	28
3.3.3	Reflexion einer Handlung und Verinnerlichung	29
3.4	Entwicklung von Stellenwertverständnis	31
3.4.1	Stellenwertverständnis aufbauen	31
3.4.2	Mögliche Schwierigkeiten	35
3.4.3	Erarbeitungsmaterialien im Bereich des Dezimalsystems	38

3.5	Ausgewählte Konsequenzen für den Unterricht	46
3.5.1	Zahlenräume ganzheitlich erweitern	46
3.5.2	Bündelungsprinzip handelnd erarbeiten	47
3.5.3	Material und Darstellungen bewusst wählen und einsetzen	48
3.5.4	Keine Routine bei Aufgabenformen	49
3.5.5	Umgang mit sprachlichen Schwierigkeiten.....	50
3.6	Resümee	51
4	EMPIRISCHE UNTERSUCHUNG	53
4.1	Einleitung	53
4.2	Forschungsdesign	53
4.3	Durchführung der Untersuchung.....	55
4.4	Interviewleitfäden und Auswahl der Aufgaben	55
4.4.1	Leitfaden zur Befragung der Lehrperson.....	55
4.4.2	Leitfaden und Kernaufgaben zur Befragung der Kinder.....	57
4.5	Kategorienschema zur Kodierung des Datenmaterials	61
4.5.1	Kategorienschema zur Auswertung der Befragung der Lehrperson	61
4.5.2	Kategorienschema zur Auswertung der Befragung der Kinder	61
4.6	Resümee	68
5	ERGEBNISSE UND DISKUSSION	70
5.1	Einleitung	70
5.2	Interpretation des Interviews mit der Lehrperson	70
5.2.1	Unterrichtsmethoden und Einsatz von Erarbeitungsmittel	70
5.2.2	Erarbeitungsmittel im Bereich des Stellenwertverständnisses.....	71
5.2.3	Informationen über die Kinder	73
5.3	Interpretation der Einzelinterviews mit den Kindern	73
5.3.1	Kind A (nach Lehrerurteil leistungsstark)	73
5.3.2	Kind B (nach Lehrerurteil leistungsstark)	78
5.3.3	Kind C (nach Lehrerurteil leistungsstark)	82
5.3.4	Kind D (nach Lehrerurteil leistungsschwach)	88
5.3.5	Kind E (nach Lehrerurteil leistungsschwach)	92
5.3.6	Kind F (nach Lehrerurteil leistungsschwach)	96

5.4	Vergleichende Interpretation der Einzelinterviews	101
5.4.1	Kategorie 1a: Einsicht in das Bündelungsprinzip – Schwerpunkt Bündeln.....	102
5.4.2	Kategorie 1b: Einsicht in das Bündelungsprinzip – Schwerpunkt Entbündeln	103
5.4.3	Kategorie 2: Einsicht in das Stellenwertprinzip	105
5.4.4	Kategorie 3: Beziehung zwischen Ziffernfolge und Zahlwort	106
5.5	Ausgewählte Kritikpunkte an der Durchführung der empirischen Untersuchung	107
5.6	Resümee	108
6	ZUSAMMENFASSUNG	110
7	LITERATURVERZEICHNIS	113
7.1	Literaturen in Papierform	113
7.2	Literaturen in elektronischer Form	115
8	ANHANG	117
8.1	Interview mit der Lehrperson	118
8.2	Interview mit Kind A.....	121
8.3	Interview mit Kind B.....	126
8.4	Interview mit Kind C.....	130
8.5	Interview mit Kind D.....	135
8.6	Interview mit Kind E.....	140
8.7	Interview mit Kind F.....	146
8.8	Im Zuge der Interviews verwendete Arbeitsblätter	154

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Zahldarstellungen im babylonischen Sexsagesimalsystem	14
Abbildung 2: Interpretationsmöglichkeiten von Zahldarstellungen im babylonischen Sexsagesimalsystem	14
Abbildung 3: Stellenwertverständnis als Integration von Konzepten auf Zehnerbasis mit Sprechweise und Schreibweise von Zahlen, vermittelt durch verschiedenartige Darstellungen derselben Zahl und verschiedenartige Zählweisen	33
Abbildung 4: Notation einer Schülerin von Zahlen innerhalb und außerhalb der Stellenwerttafel	35
Abbildung 5: Dienes-Material	39
Abbildung 6: Hundertertafel	41
Abbildung 7: Zahlenstrahl als Längenmodell mit unterschiedlichen Deutungen durch unterschiedliche Beschriftungen	43
Abbildung 8: Stellenwerttabelle symbolisch und halb-ikonisch	44
Abbildung 9: Unterschiedliche Darstellungen der Zahl 324 in der Stellentafel	45

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Vierphasenmodell des Aufbaus von Grundvorstellungen nach WARTHA und SCHULZ.....	31
Tabelle 2: Ist-Zustand der inversen Schreib- und Sprechweise	37
Tabelle 3: Leitfaden und Kernaufgaben zur Befragung der Kinder.....	57
Tabelle 4: Kind A - Einsicht in das Bündelungsprinzip - Schwerpunkt Bündeln	74
Tabelle 5: Kind A - Einsicht in das Bündelungsprinzip - Schwerpunkt Entbündeln....	75
Tabelle 6: Kind A - Einsicht in das Stellenwertprinzip.....	76
Tabelle 7: Kind A - Beziehung Ziffernfolge - Zahlwort	77
Tabelle 8: Kind B - Einsicht in das Bündelungsprinzip - Schwerpunkt Bündeln	78
Tabelle 9: Kind B - Einsicht in das Bündelungsprinzip - Schwerpunkt Entbündeln....	80
Tabelle 10: Kind B - Einsicht in das Stellenwertprinzip.....	80
Tabelle 11: Kind B - Beziehung Ziffernfolge – Zahlwort	81
Tabelle 12: Kind C - Einsicht in das Bündelungsprinzip - Schwerpunkt Bündeln	83
Tabelle 13: Kind C - Einsicht in das Bündelungsprinzip - Schwerpunkt Entbündeln .	84
Tabelle 14: Kind C - Einsicht in das Stellenwertprinzip	86
Tabelle 15: Kind C - Beziehung Ziffernfolge - Zahlwort.....	87
Tabelle 16: Kind D - Einsicht in das Bündelungsprinzip - Schwerpunkt Bündeln	88
Tabelle 17: Kind D - Einsicht in das Bündelungsprinzip - Schwerpunkt Entbündeln .	89
Tabelle 18: Kind D - Einsicht in das Stellenwertprinzip	90
Tabelle 19: Kind D - Beziehung Ziffernfolge - Zahlwort.....	91
Tabelle 20: Kind E - Einsicht in das Bündelungsprinzip - Schwerpunkt Bündeln.....	92
Tabelle 21: Kind E - Einsicht in das Bündelungsprinzip - Schwerpunkt Entbündeln..	93
Tabelle 22: Kind E - Einsicht in das Stellenwertprinzip.....	94
Tabelle 23: Kind E - Beziehung Ziffernfolge – Zahlwort	95
Tabelle 24: Kind F- Einsicht in das Bündelungsprinzip - Schwerpunkt Bündeln.....	96
Tabelle 25: Kind F- Einsicht in das Bündelungsprinzip - Schwerpunkt Entbündeln...	98
Tabelle 26: Kind F- Einsicht in das Stellenwertprinzip.....	99
Tabelle 27: Kind F - Beziehung Ziffernfolge - Zahlwort	100

Tabelle 28: Erreichte Skalenniveaus im Bereich "Einsicht in das Bündelungsprinzip - Schwerpunkt Bündeln"	102
Tabelle 29: Erreichte Skalenniveaus im Bereich "Einsicht in das Bündelungsprinzip - Schwerpunkt Entbündeln"	103
Tabelle 30: Erreichte Skalenniveaus im Bereich "Einsicht in das Stellenwertprinzip"	105
Tabelle 31: Erreichte Skalenniveaus im Bereich "Beziehung Ziffernfolge - Zahlwort"	106

1 Problemaufriss und Zielstellungen

„Wenn Schülerinnen und Schüler nicht bzw. nur teilweise über Einsicht ins dezimale Stellenwertsystem verfügen, fehlen wichtige Voraussetzungen für erfolgreiche arithmetische Lernprozesse: das Verständnis von Zahlen und damit verbunden die Basis für den Erwerb der Grundoperationen ...; das Verständnis von großen Zahlen, Zahlvorstellungen, Dezimalzahlen und Größen; die Basis für das Schätzen, Überschlagen und das Runden von Zahlen – kurz die Grundlage für arithmetisches Lernen überhaupt.“¹

Um Kinder gezielt fördern zu können, ist eine individuelle Diagnose des bereits aufgebauten Wissens notwendig. Eine derartige Analyse sollte in Bezug auf das Stellenwertverständnis besonders im Vorfeld einer Zahlenraumerweiterung durchgeführt werden.²

Nach dem LEHRPLAN DER VOLKSSCHULEN³ wird im Laufe der ersten drei Schuljahre der Zahlenraum 1000 erarbeitet. Bevor im vierten Schuljahr der Zahlenraum bis zur Million ausgebaut wird, sollte deshalb überprüft werden, inwiefern die SchülerInnen im Laufe des dritten Schuljahres im Zahlenraum bis 1000 tatsächlich Einsicht in das Bündelungsprinzip und das Stellenwertprinzip gewonnen haben.

Daraus ergeben sich folgende Forschungsfragen:

Welches Verständnis für das dezimale Stellenwertsystem haben ausgewählte Schülerinnen und Schüler der Praxisvolksschule Strebersdorf am Beginn der vierten Schulstufe entwickelt?

Inwiefern treten diesbezüglich Unterschiede zwischen Schülerinnen und Schülern, die in Mathematik gemäß dem Urteil ihrer Lehrkraft „leistungsschwach“ sind, und solchen, die gemäß dem Urteil ihrer Lehrkraft „leistungsstark“ sind, auf?

Im ersten Abschnitt der Arbeit werden zunächst die historische Entwicklung und die Prinzipien des Dezimalsystems erklärt. Im darauf folgenden Kapitel werden unterschiedliche Möglichkeiten vorgestellt mathematisches Wissen zu kategorisieren. Anschließend wird darauf eingegangen, wie aus entwicklungspsychologischer Sicht mathematisches Verständnis allgemein und Verständnis eines Stellenwertsystems im Speziellen entwickelt werden kann. Im Zuge dessen werden auch mögliche Schwierigkeiten beim Erwerb dieses Verständnisses aus mathematisch-didaktischer

¹ SCHERER & MOSER OPITZ 2010, S. 130

² vgl. GAIDOSCHIK 2009, S. 12

³ 2012, S. 153

Sicht näher untersucht. Außerdem werden Erarbeitungsmaterialien vorgestellt und ausgewählte Konsequenzen für den Unterricht in Bezug auf den Aufbau von Stellenwertverständnis erläutert.

Um die Forschungsfragen zu beantworten, wurde zunächst ein informelles Interview mit der Lehrperson einer vierten Klasse der Praxisvolkschule Strebersdorf am Beginn des Schuljahres durchgeführt. Die Auswahl von je drei in Mathematik „leistungsschwachen“ und „leistungsstarken“ Kindern oblag nach dem Vorbild von GRAY⁴ dem Klassenlehrer. Durch das Interview wurde in Erfahrung gebracht, nach welchen Kriterien der Klassenlehrer diese Auswahl traf. Außerdem wurde auch nach Methoden und Materialien gefragt, die für die Erarbeitung des Stellenwertsystems in dieser Klasse bislang verwendet wurden. Anschließend wurden qualitative Einzelinterviews nach der revidierten klinischen Methode mit den ausgewählten Kindern durchgeführt und mittels inhaltlicher und skalierender Strukturierung ausgewertet. Das zugrunde liegende Kategorienschema sowie die Skalenniveaus wurden deduktiv erstellt und induktiv modifiziert. Die daraus gewonnenen Ergebnisse werden im abschließenden Teil der Arbeit analysiert und dargestellt. Dabei wird auch auf Unterschiede zwischen gemäß dem Urteil der Lehrperson in Mathematik „leistungsstarken“ und „leistungsschwachen“ Kindern eingegangen.

⁴ 1991

2 Das dezimale Stellenwertsystem

2.1 Einleitung

Im folgenden Kapitel wird zuerst ein grober Überblick über die historische Entwicklung unterschiedlicher Zahlensysteme und die des dezimalen Stellenwertsystems gegeben. Anschließend werden die zwei grundlegenden Prinzipien eines Stellenwertsystems erläutert und die Benennung von Zahlwörtern in der deutschen Sprache wird thematisiert.

2.2 Geschichte der Zahlensysteme

Zahlen erscheinen nach DAMEROW und SIEGBERT⁵ auf der einen Seite als ewig und universell, befinden sich jedoch historisch gesehen ständig im Wandel. Besonders der „Prozess der Reflexion, des Nachdenkens“⁶ über bereits vorhandenes mathematisches Wissen regte diese Veränderung an.

Die Entwicklung des dezimalen Stellenwertsystems, wie wir es heute kennen, begann erst vor zirka 2300 Jahren in Indien. Die Entstehung dieses Systems und dessen Verbreitung ist kulturell gesehen eine der bedeutungsvollsten Leistungen der Menschheit.⁷

2.2.1 Das erste Rechnen

Die ältesten Funde von mathematischer Schrift sind bereits über 5200 Jahre alt. Auf Teilen von Tontafeln, die im Gebiet des heutigen Irak ausgegraben wurden, konnten wirtschaftliche Aufzeichnungen gefunden werden, die bereits numerisch waren.⁸

Die archaische Protokeilschrift hat mit anderen Systemen der Schreibweise von Zahlen der frühen Hochkulturen gemeinsam, dass die Zahlen 2 bis 9 nicht wie im dezimalen Stellenwertsystem durch eigene Symbole dargestellt wurden. Vielmehr wurden sie durch x-fache Wiederholung des Zeichens für eine Einheit notiert. Dabei standen die Symbole im Gegensatz zur kardinalen Bedeutung heute üblicher Zahlzeichen, die in derselben Art für Mengenangaben unterschiedlicher

⁵ 2004, S. 155

⁶ DAMEROW & SIEGBERT 2004, S. 173

⁷ vgl. GERRITZEN 2008, S. 23

⁸ vgl. DAMEROW & SIEGBERT 2004, S. 137

Gegenstände angewendet werden können, für „einzelne oder gebündelte Objekte selbst“⁹. Sie repräsentierten „standardisierte Systeme von Beziehungen, die jedoch immer nur auf bestimmte Gegenstandsbereiche angewendet“¹⁰ wurden. Rechenmeister notierten damals zwar teilweise dieselben Zeichen für gefüllte Bierkrüge oder Gefäße für Getreide, die Wertigkeit der nächst höheren Symbole (Bündelungen) war aber von Ware zu Ware verschieden. Die Mengen wurden demnach mit denselben Zahlzeichen in unterschiedlichen Zahlzeichensystemen aufgezeichnet, wobei die Relationen der Symbole zueinander bereits festgelegt waren.¹¹

2.2.2 Die Mathematik ausgewählter früher Hochkulturen

Wahrscheinlich um dem wirtschaftlichen Verwaltungsaufwand gerecht zu werden, mussten die Staaten der frühen Hochkulturen (Ägypten, Vorderasien, China sowie Mittel- und Südamerika) neue mathematische Mittel entwickeln. Die Form der archaischen Zahlzeichen wurden immer weiter vereinfacht und schließlich vor mehr als 4000 Jahren im Großreich der III. Dynastie von Ur durch einfachere Zeichen ersetzt.¹²

2.2.2.1 Das babylonische Sexagesimalsystem

Nach dem Zusammenbruch des Großreichs wurde vor etwa 3800 Jahren das erste heute bekannte Stellenwertsystem erfunden. Das babylonische Sexagesimalsystem mit der Basis sechzig wurde nur in Schriften über Mathematik angewandt und unabhängig von der Art der dargestellten Menge eingesetzt. Es war das erste Zahlensystem, in dem Mathematiker Rechenoperationen abstrakt und ohne realen Zusammenhang durchführten. Dazu vereinfachten sich im Laufe eines langen Entwicklungsprozesses unter anderem die Schriftzeichen, die sich aus einem keilförmigen Symbol für Eins und einem dem Winkelsymbol ähnlichen Zeichen für Zehn zusammensetzen. Auch bei diesem System wurden die Zahlen durch Wiederholung der Zeichen dargestellt. Alle 59 Grundzahlen, die mit den Ziffern des dekadischen Stellenwertsystems vergleichbar sind, konnten aufgeschrieben werden, indem die wiederholten Zeichen für Eins und Zehn für das Darstellen des Wertes einer Stelle näher zusammenrückten. Die Position des höheren Stellenwertes war

⁹ DAMEROW & SIEGBERT 2004, S. 155

¹⁰ DAMEROW & SIEGBERT 2004, S. 157

¹¹ vgl. DAMEROW & SIEGBERT 2004, S. 155-159

¹² vgl. DAMEROW & SIEGBERT 2004, S. 140 f.

wie beim Dezimalsystem links vom niedrigeren und wurde durch eine Lücke sichtbar getrennt¹³. Durch das Fehlen der Null, die einen nicht besetzten Stellenwert anzeigt, wird allerdings eines der Probleme des sexagesimalen Stellenwertsystems sichtbar, da dieselben Zahlen unterschiedlich interpretiert werden konnten^{14 15}.

$$\begin{array}{ll}
 222 = 3 \cdot 60 + 4 \cdot 10 + 2 = (3 \ 42)_{60} & \text{𐎶𐎵𐎶} \ll \text{𐎶𐎵} \\
 273 = 4 \cdot 60 + 3 \cdot 10 + 3 = (4 \ 33)_{60} & \text{𐎶𐎵} \lll \text{𐎶𐎵𐎶} \\
 52103 = 14 \cdot 60^2 + 28 \cdot 60 + 23 = (14 \ 28 \ 23)_{60} & \ll \text{𐎶𐎵} \lll \text{𐎶𐎵𐎶𐎵} \lll \text{𐎶𐎵𐎶}
 \end{array}$$

Abbildung 1: Zahldarstellungen im babylonischen Sexagesimalsystem¹⁶

$$\begin{array}{ll}
 \text{𐎶} \ll & - \text{steht dies für „70“ („60 + 10“) oder für „3610“ („60}^2 + 10\text{“)?} \\
 \text{𐎶𐎶} & - \text{steht dies für „2“ oder für „61“ oder für „120“?} \\
 \text{𐎶𐎶} \text{ 𐎶𐎶} & - \text{steht dies für „2} \cdot 60 + 2\text{“ oder für „2} \cdot 60^2 + 2\text{“ oder für „2} \cdot 60^2 + 2 \cdot 60\text{“?}
 \end{array}$$

Abbildung 2: Interpretationsmöglichkeiten von Zahldarstellungen im babylonischen Sexagesimalsystem¹⁷

2.2.2.2 Die ägyptische Mathematik

In Ägypten entwickelte sich die neue Zahlenschreibweise vor etwa 5000 Jahren ebenfalls hauptsächlich, um die Wirtschaft besser kontrollieren zu können. Dabei war vor allem die Notwendigkeit der Notation von Brüchen und Multiplikationen ausschlaggebend für die Veränderungen. Die Grundlage des Zahlensystems bildeten Symbole, die für die Zehnerpotenzen standen, wobei jede Zehnerpotenz ein eigenes Symbol hatte.¹⁸

Da es sich um ein Additionssystem handelte, in dem jedes Zeichen einen bestimmten Wert hatte, wurde die Größe des Zahlwortes durch Addition der einzelnen Ziffern berechnet.¹⁹

¹³ vgl. Abbildung 1

¹⁴ vgl. Abbildung 2

¹⁵ vgl. DAMEROW & SIEGBERT 2004, S. 140 ff., S. 159 f.

¹⁶ DAMEROW & SIEGBERT 2004, S. 141

¹⁷ DAMEROW & SIEGBERT 2004, S. 142

¹⁸ vgl. DAMEROW & SIEGBERT 2004, S. 142, S. 162 f.

¹⁹ vgl. HUCKLE & SCHNEIDER 2006, S. 29 f.

2.2.3 Die römische Zahlenschrift

In Europa war vor dem Auftreten des dezimalen Stellenwertsystems die römische Zahlenschrift verbreitet. Durch die eindeutige Zuordnung von Zeichen zu einzelnen Werten ist dieses System auch weniger abstrakt als das Dezimalsystem. Da die Zahlzeichen der Größe nach mit dem größten links beginnend aneinandergereiht und addiert werden, handelt es sich bei der römischen Zahlenschrift wie bei der ägyptischen um ein Additionssystem, bei dem auf eine Null verzichtet werden kann. In Bezug auf die Bündelung tritt bei den römischen Zahlen eine „alternierende Fünfer-Zweier-Bündelung“²⁰ auf. Das bedeutet, dass abwechselnd „jeweils 2 bzw. 5 kleinere Bündelungseinheiten zu einer größeren Bündelungseinheit zusammengefasst“²¹ werden. Das Zeichen für eins ist „I“, für fünf „V“, für zehn „X“, für fünfzig „L“, für einhundert „C“, für fünfhundert „D“ und für eintausend „M“.²²

Erst im Mittelalter wurde die Schreibweise der römischen Zahlen vereinfacht. Das Voranstellen eines Zeichens mit niedrigerem Wert vor eines mit höherem Wert bedeutet seitdem, dass der kleinere Wert vom größeren subtrahiert wird. So steht zum Beispiel „IV“ für $5 - 1 = 4$. Dabei muss aber beachtet werden, dass nur eins, zehn und einhundert von dem jeweils Fünf- oder Zehnfachen abgezogen werden darf. Doch auch durch diese Vereinfachung hat sich eines der größten Probleme der römischen Zahlenschrift, nämlich dass sehr große Zahlen nur durch lange und recht unübersichtliche Zeichenfolgen dargestellt werden können, nicht lösen lassen.²³

Eine weitere Schwierigkeit der römischen Zahlenschrift stellt das Rechnen dar. Mit dieser Form der Zahldarstellung war es nicht möglich, schwierige Rechnungen systematisch und einfach zu lösen, wie es bei den Algorithmen der schriftlichen Rechenverfahren im Dezimalsystem der Fall ist. Additive Rechenoperationen waren zwar noch möglich, Multiplikationen und Divisionen hingegen konnten nur von Meistern der Mathematik durchgeführt werden. Dabei rechneten sie nicht mit den Symbolen der Zahlenschrift, sondern nahmen den Abakus, ein Rechenbrett, zu Hilfe, wo mittels Materialien wie Steinen und Münzen gerechnet wurde.²⁴

²⁰ PADBERG & BENZ 2011, S. 80

²¹ PADBERG & BENZ 2011, S. 80

²² vgl. PADBERG & BENZ 2011, S. 80 f.

²³ vgl. HOFHERR 2002, S. 2 f.

²⁴ vgl. PADBERG & BENZ 2011, S. 81, S. 84

2.2.4 Das dezimale Stellenwertsystem

Die Geschichte des Dezimalsystems begann, wie bereits erwähnt, vor etwa 2300 Jahren in Indien. Dort wurde ein Zahlensystem entwickelt, dass durch die Ziffern 1 bis 9 dargestellt wurde. Dabei gab es aber noch unterschiedliche Symbole für die Ziffern in den verschiedenen Potenzen der Basis 10. Erst 800 Jahre später wurde das System durch die Einführung der Ziffer Null, die für das Auslassen einer Zehnerpotenz stand, einfacher gestaltet. Dadurch konnten auch sehr große Zahlen durch verhältnismäßig kurze Zeichenfolgen dargestellt werden.²⁵

Durch arabische Mathematiker wie zum Beispiel Muhamed ben Musa Alchorizmi, von dessen Namen auch der Begriff Algorithmus abgeleitet wurde, wurde das dekadische Stellenwertsystem, dessen Name durch die Anzahl der gebrauchten Ziffern geprägt wurde, über die islamische Welt verbreitet. Etwa 1200 n. Chr. fand das Dezimalsystem über das von Leonardo von Pisa (Fibonacci) verfasste Buch „Liber Abaci“ den Weg nach Italien. Er vertrat die Meinung, dass er „zum erstenmal [!] das indische Rechnen im wirklichen, täglichen Leben des Kaufmanns“²⁶ behandelt hätte. Anfangs widersetzte sich vor allem die kirchliche Gesellschaft gegen die neue Zahlenschreibweise und bezeichnete diese sogar als „Zahlfiguren der ‚Ungläubigen‘“²⁷. Auch wurde sie zum Beispiel aus Angst vor gefälschten Zahlen verboten, da man sehr leicht eine Null anhängen und so den Wert der Zahl grundlegend verändern konnte. Durch Kaufleute, die das Rechnen mit dem neuen Zahlensystem beherrschten, verbreitete sich das Dezimalsystem aber dennoch im Laufe des Mittelalters in Europa. Erst vor etwa 500 Jahren setzte sich dann die neue Zahlenschreibweise im Großteil Europas durch.²⁸

Heute ist das dekadische Stellenwertsystem weltweit in vielen Ländern vertreten und war in den vergangenen Jahrhunderten Bedingung für den wissenschaftlichen, wirtschaftlichen und technischen Fortschritt unserer Gesellschaft. Dass sich gerade das Stellenwertsystem mit der Basis Zehn so weit verbreitet hat, geht nach IFRAH²⁹ „auf den ‚Zufall der Natur‘, die Anatomie unserer beiden Hände zurück, denn der Mensch hat nun einmal das Zählen anhand seiner zehn Finger gelernt.“

²⁵ vgl. HUCKLE & SCHNEIDER 2006, S. 1 f.

²⁶ DAMEROW & SIEGBERT 2004, S. 150

²⁷ GERRITZEN 2008, S. 24

²⁸ vgl. DAMEROW & SIEGBERT 2004, S. 149 ff., S. 173 f.; GERRITZEN 2009, S. 1 f.; GERRITZEN 2008, 23 f.

²⁹ IFRAH 1991, S. 55

Zwar hat die Zahlenschrift im Vergleich zu früheren Notationsformen an Anschaulichkeit verloren, doch erst durch diese Schreibweise ist es möglich geworden, schon im Grundschulalter alle vier Grundrechenarten mit großen Zahlen zu erlernen. Dabei konnte auch auf den Abakus verzichtet und nur schriftlich gerechnet werden. Besonders hat dazu unter anderem der Mathematiker Adam Ries, auf den sich die Redensweise „nach Adam Riese“ bezieht, mit dem Verfassen von Rechenbüchern im Jahr 1522 beigetragen. Durch diese Lehrwerke war das Rechnen nicht mehr nur den Rechenmeistern vorbehalten, sondern wurde „in allen Bildungsschichten des Volkes verbreitet“^{30 31}.

Beigetragen dazu hat sicher der Rechenvorteil des dezimalen Stellenwertsystems, der darin begründet liegt, dass durch das Automatisieren verhältnismäßig weniger Grundaufgaben und durch die Anwendung geeigneter Techniken für anfallende Stellenüberschreitungen und Stellenunterschreitungen auch mit großen Zahlen nichtzählend gerechnet werden kann.³²

2.3 Die Prinzipien eines Stellenwertsystems

„Das Besondere, Fundamentale an der Stellenwertdarstellung von Zahlen als Symbolik ist ihre höchst effiziente Systematik. Mit einer endlichen Anzahl von Ziffern (in unserem Dezimalsystem zehn) kann jede Zahl (bis ins Unendliche) unter Nutzung des Schreibraumes (Stelle) eindeutig dargestellt werden.“³³

Diese Schreibweise von Zahlen in Stellenwertsystemen folgt immer zwei Prinzipien: dem Prinzip der fortgesetzten Bündelung und dem Stellenwertprinzip.

2.3.1 Das Prinzip der fortgesetzten Bündelung³⁴

Bündeln bedeutet, dass immer eine bestimmte, gleichgroße Anzahl von Elementen zu einer neuen Einheit zusammengefasst wird. Die Größe der Teilmengen entspricht der Basis eines Stellenwertsystems. So werden zum Beispiel im Dezimalsystem, das die Basis zehn hat, immer zehn Elemente der kleineren Einheit zur nächstgrößeren gebündelt. Demnach ergeben zehn Einer einen Zehner, zehn Zehner einen Hunderter und so weiter. Dieses Prinzip gilt aber nicht nur für das dekadische

³⁰ DAMEROW & SIEGBERT 2004, S. 174

³¹ vgl. GERRITZEN 2009, S. 2; DAMEROW & SIEGBERT 2004, S. 174

³² vgl. GAIDOSCHIK 2003a, S. 137

³³ WINTER 2001, S. 2

³⁴ vgl. KRAUTHAUSEN & SCHERER 2007, S. 16 f.; SCHERER & MOSER OPITZ 2010, S. 131 f.

Zahlensystem. Es kann auf Stellenwertsysteme mit unterschiedlichen Basen angewendet werden. Allgemein formuliert gilt demnach, dass immer eine Menge, die in ihrer Anzahl der Größe der Basis b des Zahlensystems entspricht, zum Bündel 1. Ordnung gebündelt wird. b Bündel 1. Ordnung werden dann zu einem Bündel 2. Ordnung zusammengefasst, das der Anzahl b^2 entspricht. Dies kann und muss so lange durchgeführt werden, wie es möglich ist, Bündel n -ter Ordnung zur nächsthöheren Bündelungseinheit, die der Menge b^{n+1} entspricht, zusammenzufassen.

Im Vergleich zu anderen Zahlenschreibweisen ist der Vorteil dieser Notationsform, dass nur der Anzahl der Basis entsprechend viele Ziffern benötigt werden, um Zahlen beliebiger Größe aufschreiben zu können, da größere Mengen immer zu Bündeln höherer Ordnung zusammengefasst und deshalb keine eigenen Symbole dafür benötigt werden. Im Dezimalsystem mit der Basis zehn werden demnach zehn Ziffern (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0) verwendet. Im Vergleich dazu benötigt man für Notationen im Binärsystem mit der Basis zwei, das besonders in der Informatik Anwendung findet, nur zwei Ziffern (0, 1). Daraus ergibt sich auch, dass sich die Größe der Basis eines Zahlensystems indirekt proportional zur Länge der geschriebenen Ziffernfolgen verhält. Das bedeutet, dass eine Zahl mit demselben Wert im Dezimalsystem übersichtlicher und durch wesentlich weniger Stellen dargestellt werden kann als zum Beispiel im Binärsystem.

In Bezug auf das Bündelungsprinzip muss auch die Umkehrung des Bündelungsvorganges, das Entbündeln, beachtet werden. Das bedeutet, dass die Bündelung von zum Beispiel zehn Einern in einen Zehner reversibel ist und, unter anderem wenn es für das Lösen von Operationen notwendig ist, aufgehoben werden kann.

2.3.2 Das Stellenwert- oder Positionsprinzip³⁵

Um Ergebnisse der Bündelung notieren zu können, werden jeder Ziffer zwei Werte zugeordnet: Der Stellenwert, was bedeutet, dass der Ziffer durch ihre Position innerhalb der Zahl ein Wert bzw. ein Bündel der entsprechenden Ordnung zugeordnet wird, und ein Ziffernwert, der angibt, wie viele solcher Bündel in der Zahl enthalten sind. Demnach können die Ziffern 1 bis 9 unterschiedliche Werte haben. So steht die Ziffer 4 in der Zahl 444 zum Beispiel einmal für vier Einer, einmal für vier Zehner und einmal für vier Hunderter. Dabei gilt in allen Ländern, in denen das Dezimalsystem verwendet wird, dass der nächsthöhere Stellenwert links vom niedrigeren notiert

³⁵ vgl. KRAUTHAUSEN & SCHERER 2007, S. 18 f.; SCHERER & MOSER OPITZ 2010, S. 133

wird. Wird ein Stellenwert nicht besetzt, so muss dies durch eine Null gekennzeichnet werden.

2.3.3 Interpretation von in Ziffern notierten mehrstelligen Zahlen

Um Zahlen, die im dezimalen Stellenwertsystem notiert sind, richtig zu verstehen, müssen demnach zusammenfassend folgende Elemente verstanden worden sein³⁶:

- Der Stellenwert einer Ziffer ist durch ihre Position innerhalb der Ziffernfolge gegeben.
- Der Wert einer Ziffer kann durch Multiplikation des Ziffernwertes mit dem Wert der Position errechnet werden. Dieses Prinzip wird auch als „multiplikative Eigenschaft“³⁷ des Dezimalsystems bezeichnet.
- Die „additive Eigenschaft“³⁸ eines Stellenwertsystems besagt, dass der Wert der Ziffernfolge durch Addieren aller durch die Ziffern an ihren jeweiligen Stellen gegebenen Einzelwerte berechnet werden kann.
- Der Wert einer Stelle ist immer das Zehnfache des Wertes der Stelle rechts davon. Demnach verzehnfachen sich die Werte der Positionen immer von rechts nach links von Stelle zu Stelle.

2.4 Benennung von Zahlwörtern in der deutschen Sprache

Grundlegend muss zwischen der reinen Ziffernschreibweise der Zahlwörter (zum Beispiel 25148) und der Wortform (zum Beispiel fünfundzwanzigtausendeinhundertachtundvierzig) unterschieden werden. Um größere Zahlen zu benennen, werden größere Einheiten auf der Grundlage von Einern, Zehnern und Hundertern in Dreiergruppen benannt: Tausend, *Zehntausend*, *Hunderttausend*, Million, *Zehn*millionen, *Hundert*millionen und so weiter.³⁹

Besonderes Augenmerk erfordert in der deutschen Sprache die inverse Sprechweise zweistelliger Zahlwörter des Dezimalsystems, an deren Einerstelle nicht die Ziffer 0 steht. Im Gegensatz zur üblichen Lese- und Schreibrichtung von links nach rechts muss die Reihenfolge, in der den Ziffern Teile des Zahlwortes einer zweistelligen

³⁶ vgl. SCHERER & MOSER OPITZ 2010, S. 133

³⁷ SCHERER & MOSER OPITZ 2010, S. 133

³⁸ SCHERER & MOSER OPITZ 2010, S. 133

³⁹ vgl. PADBERG & BENZ 2011, S. 82 f.

Zahl zugeordnet werden, umgekehrt und durch „und“ ergänzt werden. Daraus ergibt sich, dass beim Lesen die erste Ziffer übersprungen bzw. gemerkt werden muss und die zweite Ziffer zuerst genannt wird, wobei bei größeren Zahlen auch mehrere Sprünge und Wege gegen die Leserichtung notwendig werden. Auch beim Schreiben gehörter Zahlwörter muss die Einerstelle, die zuerst gehört wird, nur gemerkt und die Zehnerstelle, die erst danach wahrgenommen wird, zuerst notiert werden.⁴⁰

Im Bereich zwischen dreizehn und neunzehn kann es durch eine weitere Besonderheit der deutschen Sprache zu Verwechslungen mit den ganzen Zehnerzahlen führen. Da das Wort „viertausend“ für die Zahl 4000 und „vierhundert“ für 400 steht, kann es verwirrend sein, dass mit „vierzehn“ nicht 40, sondern 14 gemeint ist.⁴¹

Im Bereich der reinen Zehnerzahlen ist zwar die Systematik der ergänzenden Silbe „-zig“ für alle Zahlen mit Ausnahme von „zehn“ statt „eins-zig“ gültig, dennoch gibt es auch hier eine Ausnahme durch „zwan-zig“ an Stelle von „zwei-zig“, „sieb-zig“ statt „sieben-zig“, „sech-zig“ an Stelle von „sechs-zig“ und „drei-ßig“ statt „drei-zig“. Außerdem stellen die Zehnerzahlen von 20 bis 90 generell eine Abweichung zur Sprechweise des größten Teils der zweistelligen Zahlen dar, da zum Beispiel „vierzig“ gemäß der oben erläuterten Systematik eigentlich „nullundvierzig“ heißen müsste. Weitere Ausnahmefälle sind die Zahlen „elf“ und „zwölf“.⁴²

2.5 Resümee

Das dezimale Zahlensystem ist menschheitsgeschichtlich betrachtet eine sehr junge Erfindung, die aber den wirtschaftlichen, wissenschaftlichen und technischen Fortschritt der Menschheit maßgeblich beeinflusst und beschleunigt hat. Sie hat das Durchführen von Rechenoperationen wesentlich vereinfacht, die Darstellung großer Zahlen mittels weniger Zeichen ermöglicht und die Mathematik weg von wenigen Rechenmeistern zugänglich für das Volk gemacht.

Besonders effizient sind Stellenwertsysteme durch das Prinzip der fortgesetzten Bündelung und das Stellenwertprinzip, da dadurch auch große Zahlen im Gegensatz zu reinen Additionssystemen mit nur wenigen Symbolen (Ziffern) dargestellt werden können. Dabei wird einer Ziffer neben ihrem Ziffernwert auch ein Stellenwert

⁴⁰ vgl. GERRITZEN 2009, S. 1

⁴¹ vgl. GERRITZEN 2009, S. 1

⁴² vgl. GAIDOSCHIK 2007, S. 172

zugeordnet, dessen Größe abhängig von der Position der Ziffer innerhalb der Ziffernfolge ist. Zahlensysteme, die nach diesen Prinzipien verfahren, können auf der Basis unterschiedlicher Zahlen aufgebaut werden. Dabei werden immer der Anzahl der Basis entsprechend viele Ziffern benötigt. Je größer die Basis ist, desto kürzer sind die Zeichenfolgen.

Grundlegend muss zwischen der Ziffernschreibweise und der Wortform eines Zahlwortes unterschieden werden. Beim Dezimalsystem werden größere Zahlen in Dreiergruppen auf Grundlage der drei niedrigsten Stellenwerte (Einer, Zehner und Hunderter) benannt. In der deutschen Sprache muss abgesehen davon auf die Inversion bei zweistelligen und davon abgeleiteten Zahlwörtern geachtet werden.

3 Aufbau mathematischen Verständnisses

3.1 Einleitung

Im folgenden Kapitel werden zunächst unterschiedliche Formen der Einteilung mathematischen Wissens aus psychologischer Sicht erläutert. Anschließend werden entwicklungspsychologische Hintergründe und Grundlagen des Lehrens und Lernens von Mathematik beschrieben und der Aufbau mathematischen Verständnisses grob erklärt. Im darauf folgenden Abschnitt wird erläutert, wie Stellenwertverständnis entwickelt werden kann, welche Schwierigkeiten dabei auftreten und welche Arbeitsmittel in diesem Bereich verwendet werden können. Abschließend werden daraus resultierende Konsequenzen für den Unterricht beschrieben.

3.2 Mathematisches Wissen

Im folgenden Abschnitt wird in Anlehnung an GERSTER und SCHULTZ⁴³ mathematisches Wissen aus unterschiedlichen Gesichtspunkten betrachtet und kategorisiert: Physikalisches, konventionelles und logisch-mathematisches Wissen, konzeptuelles und prozedurales Wissen, das mit verstandenem und assoziativ auswendiggelerntem Wissen in Verbindung gebracht wird, und informelles und formelles Wissen. Dabei wird nicht eine Kategorisierung als die einzig richtige angesehen. Vielmehr dienen alle drei dazu, Wissen aus unterschiedlichen Perspektiven zu analysieren, um mögliche Schwierigkeiten der Kinder beim Aufbau desselben besser verstehen zu können.

3.2.1 Formen des Wissens nach Piaget

Jean Piaget (1896-1980) orientierte sich bei seinen Ansätzen stark an der Evolutionstheorie⁴⁴. Er differenzierte nach der Herkunft des Wissens drei unterschiedliche Arten desselben:

3.2.1.1 Physikalisches Wissen

Grundlage dieses Wissens sind die Wahrnehmungen der Umwelt, die der Mensch durch seine Sinnesorgane macht. Durch die Verarbeitung derselben werden

⁴³ 2004, S. 27-34

⁴⁴ vgl. LAUTER 1991, S. 13, S. 24

Kategorien entwickelt, in die spätere „sensorische oder motorische Erfahrungen“⁴⁵ eingeordnet werden. Dadurch wird die Farbe „grün“ zum Beispiel als solche auch wiedererkannt. Die Kategorien können in der Folge zu Konzepten (Begriffen) entwickelt werden, die als „internalisierte Dinge oder internalisierte Handlungen mental .. vorgestellt“⁴⁶ werden können.⁴⁷

3.2.1.2 Konventionelles Wissen

Konventionelles Wissen wird durch die Gesellschaft geprägt und definiert. Darunter werden Bezeichnungen für die Kategorien verstanden, die in Form von physikalischem Wissen bereits erlernt wurden. Beispiele dafür sind die Namen von Farben (zum Beispiel „rot“) oder Gegenständen (zum Beispiel „Tisch“). Auch die Bedeutung schriftlich festgehaltener Rechenoperationen muss durch konventionelles Wissen zugeordnet werden. So steht zum Beispiel „7 - 3“ für die Differenz der Zahlen 7 und 3. Ebenso ist die Zahlenschreibweise des Dezimalsystems in Form von Ziffernfolgen konventionelles Wissen, das von Menschen festgelegt wurde und an nachfolgende Generationen weitergegeben wird.⁴⁸

3.2.1.3 Logisch-mathematisches Wissen

Diese Form des Wissens ist das Ergebnis „geistiger Aktivität, welche Beziehungen herstellt zwischen Objekten oder Tätigkeiten“⁴⁹. Dabei wird auf Unterschiede oder Gemeinsamkeiten von Objekten eingegangen. Werden zum Beispiel blaue und rote Würfel betrachtet, wird geistig eine Beziehung zwischen den Objekten hergestellt, wenn sie aufgrund der Farbe als *verschieden* angesehen werden, obwohl sie in vielerlei Hinsicht *gleich* sind (zum Beispiel Größe oder Gewicht). Diese Beziehung zwischen den Objekten ist allerdings nicht im Material selbst vorhanden und kann auch nicht mit menschlichen Sinnen wahrgenommen werden, vielmehr ist sie das nicht messbare Ergebnis geistiger Aktivität.⁵⁰

Die drei Typen von Wissen müssen besonders dann Beachtung finden, wenn Lehrpersonen den Wissenserwerb durch Anschauungsmaterial unterstützen.

⁴⁵ GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 27

⁴⁶ GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 27

⁴⁷ vgl. GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 27 f.

⁴⁸ vgl. GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 28

⁴⁹ GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 28

⁵⁰ vgl. GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 28

Werden zum Beispiel Einerwürfel, Zehnerstangen und Hunderterplatten betrachtet, so kann das Kind rein physikalisches Wissen besitzen, wodurch ihm die Materialeigenschaften bewusst sind. Durch konventionelles Wissen kann es die Gegenstände vielleicht auch benennen, es ist aber dadurch nicht garantiert, dass das Kind bereits logisch-mathematisches Wissen im Sinne von „ein Zehner ist das Gleiche wie 10 Einer“⁵¹ entwickelt hat, auch wenn ihm bewusst ist, dass eine Zehnerstange genauso lang wie zehn Einerwürfel ist. Mathematische Beziehungen sind nichts Physikalisches oder bloße Konvention, ebenso wenig können sie wahrgenommen oder durch bloßes Regellernen erfasst werden. Vielmehr sind es logische Konstrukte und Konzepte, die durch Verstandesaktivität aufgebaut werden müssen. Dieser Aufbau kann dem Individuum nicht abgenommen, sondern nur zum Beispiel durch geeignete Materialien, Tätigkeiten und das Reflektieren darüber unterstützt werden. Da erwachsene Personen dieses Wissen allerdings schon konstruiert haben, fällt es ihnen meist schwer, die Schwierigkeiten der Kinder zu verstehen, vor allem weil das geistige Entstehen mathematischer Beziehungen für Außenstehende nicht erkennbar ist.⁵²

3.2.2 Konzeptuelles und prozedurales Wissen

„Die Beziehung zwischen konzeptuellem und prozeduralem Wissen ist der Schlüssel zum Verständnis vieler Lernprozesse und Lernschwierigkeiten von Kindern“⁵³.

3.2.2.1 Konzeptuelles Wissen

Unter dieser Art des Wissens kann man sich ein Netzwerk von Beziehungen zwischen einzelnen Wissens-elementen vorstellen, wobei die Verknüpfungen derselben genauso relevant sind wie die Einzelelemente selbst. Dazu muss bereits vorhandenes Wissen mit neuem verbunden werden. Auch ist es wünschenswert, dass vorerst eigenständige Netzwerke (zum Beispiel die Ausführung schriftlicher Rechenverfahren und Einsicht in das Stellenwertprinzip) miteinander verknüpft werden, wodurch „plötzlich Einsicht, Verständnis“⁵⁴ entwickelt wird.⁵⁵

⁵¹ GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 29

⁵² vgl. GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 28 f.

⁵³ GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 29

⁵⁴ GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 30

⁵⁵ vgl. GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 29 ff.

Derartige Konzepte müssen auch für einzelne Zahlen erworben werden. Das beschreiben GERSTER und SCHULTZ⁵⁶ anhand eines Beispiels folgendermaßen:

„Verständnis des Zahlbegriffs (des Konzepts) der Sieben entwickelt sich dadurch, dass nach und nach die Vielfalt der .. Beziehungen hergestellt wird, und zwar

- *zu konkreten Handlungen (zu 6 Plättchen noch eines dazulegen),*
- *zu Situationen der realen Welt (7 Finger,... 7 Wochentage)*
- *zu didaktischen Modellen (7 Plättchen auf dem Zehnerfeld),*
- *zu bildlichen Vorstellungen (7 Punkte auf dem Zehnerfeld),*
- *zur Zahlwortreihe (das siebte Zahlwort, die Menge der Zahlwörter von 1 bis 7),*
- *zu geschriebenen Symbolen wie Ziffern, Summen und Differenzen.“*

3.2.2.2 Prozedurales Wissen

Im Gegensatz zu konzeptuellem Wissen, das sich mit dem Sinngehalt der Mathematik beschäftigt, beinhaltet das prozedurale Wissen die Kenntnisse der Symbole und der Regeln für die Anwendung derselben. Dabei wird besonders, wie zum Beispiel bei den Algorithmen der schriftlichen Rechenverfahren, auf das Abhandeln der einzelnen Teilschritte in der richtigen Reihenfolge, die Prozedur, geachtet.⁵⁷

Nach GERSTER und SCHULTZ⁵⁸ ist im traditionellen Mathematikunterricht meist mehr prozedurales Wissen vorhanden, da viele Kinder aufgrund von mangelndem Bezug zu Problemen aus der realen Welt und dadurch für sie fehlender Sinnhaftigkeit des Lernstoffes zum Auswendiglernen übergehen. Dabei verzichten sie auf das Verstehen der Thematik durch Herstellen von Verknüpfungen zu bereits vorhandenem Wissen. Ein Verständnis für mathematische Inhalte kann aber erst aufgebaut werden, wenn diese in ein Netzwerk aus Verknüpfungen und Fakten eingebettet werden und daraus auch wieder reproduziert werden können.

Nach LORENZ⁵⁹ sollte außerdem prozedurales Wissen aus konzeptuellem (deklarativem) heraus entwickelt werden. Gerade leistungsschwache Schülerinnen und Schüler verfügen aber oft über ein großes Repertoire an Routinen, die sie anwenden können bzw. auswendig wissen, ohne jedoch Verständnis für die

⁵⁶ 2004, S. 31

⁵⁷ vgl. GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 31

⁵⁸ 2004, S. 32 f.

⁵⁹ 2011, S. 44

Thematik aufgebaut zu haben. In diesem Punkt steht die Empirie in großem Widerspruch zur Praxis.

3.2.3 Informelles und formelles Wissen⁶⁰

Der Unterschied dieser beiden Formen von Wissen besteht darin, dass informelles Wissen vom Kind selbst im Laufe seines Lebens durch den Alltag gewonnen wird. Formelles Wissen hingegen wird vorwiegend in Bildungsinstitutionen erworben. Stellt man den Kindern Aufgaben mit einem ihnen vertrauten praktischen Hintergrund, können sie diese meist lösen. Wenn bei der Lösung eines Problems derselben Art auf der rein symbolischen Ebene dann Fehler passieren, vertrauen die Schülerinnen und Schüler aber meist dennoch der in der Schule gelernten – aber vielleicht missverstandenen – Lösungsvariante und stellen selbstständig keinen Bezug zur Realität her.

Dies soll durch ein Beispiel von MACK⁶¹ näher erläutert werden. Kinder wurden gefragt, ob sie von einer Pizza mehr bekommen, wenn sie ein Stück einer in 8 gleich große Stücke geteilten, oder einer gleich großen in 6 Stücke geteilten Pizza bekommen. Diese Frage wurde von allen Kindern richtig beantwortet. Wurden sie aber davor gefragt, ob der Bruch $1/6$ oder $1/8$ größer ist, wählten alle $1/8$ als den größeren Bruch, da 8 die größere Zahl sei. Selbst wenn die abstrakte Aufgabe nach der lebensbezogenen gestellt wurde, antworteten 4 von 5 Kindern falsch, weil sie auf formelles Wissen vertrauten. Besonderes Augenmerk sollte bei der Planung des Unterrichts deshalb darauf gelegt werden, dass das bereits vorhandene Wissen der Schülerinnen und Schüler eingebunden und daran angeknüpft wird, sowie bei mathematischen Problemen immer der Bezug zur Lebenswelt der Kinder und zu realen Handlungen hergestellt wird.

3.3 Entwicklungspsychologische Hintergründe des mathematischen Lernens und Lehrens

Im folgenden Abschnitt werden ausgewählte entwicklungspsychologische Sichtweisen der Fachdidaktik auf das Lernen und den Aufbau von mathematischem Wissen erläutert.

Lange stand auf Grundlage behavioristischer Ansätze in Unterrichtssituationen das Belehren im Vordergrund. Die Rolle des Lernenden wurde eher passiv und

⁶⁰ vgl. GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 33 f.

⁶¹ 1990, S. 21

aufnehmend, die Rolle der Lehrperson übermittelnd und bebringend gesehen. Bezeichnend dafür war auch die Kleinschrittigkeit des Unterrichts, die durch eine gestufte Vermittlung vom Einfachsten zum Schwierigsten gekennzeichnet war.⁶²

3.3.1 Die konstruktivistische Sichtweise

Erste Kritik an der behavioristischen Orientierung des Unterrichts kam bereits vor knapp hundert Jahren auf. Bereits 1927 stellte KÜHNEL⁶³ fest, dass „beibringen, darbieten, übermitteln .. vielmehr Begriffe der Unterrichtskunst vergangener Tage“ sind. Ein Paradigmenwechsel im Verständnis von Lernen vom passiven zum aktiven Erkenntnisgewinn fand allerdings erst Mitte der 1980er Jahre statt. Vertreter des Konstruktivismus sahen den Aufbau von Wissen als „konstruktive Aufbauleistung des Individuums“⁶⁴.

Nach Piaget entwickelt sich die Intelligenz einer Person erst durch ihre Konfrontation mit der Umwelt. Die darauf beruhende Äquilibrationstheorie (Gleichgewichtstheorie) besagt, dass das Kind immer versucht, die bereits vorhandenen inneren Konzepte (Schemata) mit der wahrgenommenen Umwelt ins Gleichgewicht zu bringen. Dies kann es durch Assimilation erreichen, indem es die neuen Erfahrungen den bereits vorhandenen Schemata zuordnet. Gelingt dies nicht, so werden entweder vorhandene Konzepte umgeändert oder neue Schemata entwickelt. Diesen Vorgang nennt man Akkommodation.⁶⁵

Durch diese neue Sichtweise wandelte sich die Vorstellung von Lernen als Aufnahme und Reproduktion zu Lernen als konstruktivem Prozess, der nur durch Aktivität des Lernenden erreicht werden kann. Grundlegend ist dabei das Entstehen von Verknüpfungen zwischen bereits vorhandenen und neu erworbenen Wissens-elementen. Deshalb sollte auch vom Erlernen von einzelnen Fakten sowie dem stufenweisen Lernen nach Schwierigkeitsgrad Abstand genommen werden. Vielmehr steht ganzheitliches Lernen im Vordergrund, um das Erkennen von Zusammenhängen zu ermöglichen. Dabei sollte auch darauf geachtet werden, dass neue Lerninhalte so aufbereitet werden, dass möglichst viele Anknüpfungspunkte zu

⁶² vgl. SCHERER & MOSER OPITZ 2010, S. 17; KRAUTHAUSEN & SCHERER 2007, S. 111 f.

⁶³ 1959, S. 70 zit. in SCHERER & MOSER OPITZ 2010, S. 17

⁶⁴ SCHERER & MOSER OPITZ 2010, S. 17

⁶⁵ vgl. LAUTER 1991, S. 13 ff.; GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 34

bereits vorhandenem Wissen möglich und erkennbar gemacht werden, da dadurch Neues leichter erlernt und besser verinnerlicht werden kann.⁶⁶

3.3.2 Die Repräsentationsformen nach Bruner

Durch Piagets Forschungen wurde auch deutlich, dass die konkrete Handlung eine besondere Bedeutung bei der Entwicklung von Operationen spielt, die innerlich ablaufen. J. S. Bruner griff vor 40 Jahren Piagets Erkenntnisse auf und entwickelte diese weiter, indem er auf die Relevanz der Sprache und der Verwendung von Symbolen eingeht.⁶⁷

Wissen kann demnach auf drei unterschiedliche Arten dargestellt werden:⁶⁸

- durch eine konkrete Handlung (enaktiv),
- durch eine bildliche Darstellung (ikonisch),
- durch Zeichen und Sprache (symbolisch).

Elementar ist dabei die konkrete Handlung mit Material, da diese bereits von Kleinkindern ohne Kenntnis von Sprache oder bildlichen Darstellungen durchgeführt werden kann. Auf der abstrakteren ikonischen Ebene greift das Kind auf Vorstellungsbilder der Tätigkeit zurück und wird dadurch unabhängiger von konkreten Handlungen und flexibler bei der inneren Konstruktion der eigenen Umwelt. Durch die größte Flexibilität zeichnet sich die symbolische Repräsentationsform aus, da sich die Bedeutung der Zeichen willkürlich entwickelt hat und keinerlei Ähnlichkeit mit der Form der Symbole haben muss. Nach Bruner sind diese drei Darstellungsformen grundlegend „für den Aufbau kognitiver Systeme beim Kind“^{69 70}.

Besonders wichtig ist allerdings, dass diese Repräsentationsformen nicht unabhängig voneinander bzw. nicht nur nacheinander im Unterricht eingesetzt werden, sondern wiederholend Wechsel der Darstellungsformen durchgeführt werden. Charakteristisch für ein gut entwickeltes Verständnis ist, dass flexibel zwischen den Repräsentationsformen übersetzt werden kann. Diese Übersetzungen,

⁶⁶ vgl. SCHERER & MOSER OPITZ 2010, S. 17 f.; KRAUTHAUSEN & SCHERER 2007, S. 111 f.; GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 36 f.

⁶⁷ vgl. LAUTER 1991, S. 19 ff.

⁶⁸ vgl. SCHIPPER 2009, S. 36

⁶⁹ LAUTER 1991, S. 22

⁷⁰ vgl. LAUTER 1991, S. 20 ff.

die in alle Richtungen möglich sein sollten, bezeichnet man auch als „intermodalen Transfer“^{71, 72}.

Auch WARTHA und SCHULTZ⁷³ betonen, dass erst von mathematischem Verständnis ausgegangen werden kann, wenn Darstellungen von Lösungen in verschiedenen Formen möglich sind. Dazu müssen Grundvorstellungen aktiviert und gegebenenfalls verknüpft werden. Beispielsweise werden Übersetzungen einer dargestellten Menge in ein Zahlwort (Zahlauffassung) oder eines Zahlwortes bzw. einer Ziffernfolge in eine Darstellung mit Material (Zahldarstellung) erst durch bereits aufgebaute Grundvorstellungen in diesen Bereichen möglich. Derartige Wechsel der Repräsentationsformen können auch Aufschluss darüber geben, ob rein prozedurales Wissen aufgebaut wurde, oder ob den Strategien bereits Konzepte zugrunde liegen.

3.3.3 Reflexion einer Handlung und Verinnerlichung

Nach SCHIPPER⁷⁴ ist das „oberste Ziel des Mathematikunterrichts .. das mathematische Verständnis.“

Dieses kann aber nicht durch bloße Handlung mit Materialien und die innere bildliche Vorstellung der Materialmanipulationen erreicht werden. Auch darf nicht davon ausgegangen werden, dass Handlungen automatisch zu mathematischem Verständnis führen, oder dass ein Kind einen Sachverhalt verstanden hat, wenn es die Aufgabe mit Hilfe von Material darstellen und lösen kann. Vielmehr muss die Handlung reflektiert und verinnerlicht werden.⁷⁵

Dazu betont SCHIPPER⁷⁶ auch, dass Unterricht nicht nur „handlungsorientiert“, sondern auch „vorstellungsorientiert“ gestaltet werden muss. Demnach sollten nicht nur Handlungen im Mittelpunkt stehen, sondern das Verständnis der darin enthaltenen Strukturen von zentraler Bedeutung sein. Die Manipulation von Material kann deshalb nur als Ausgangspunkt zum Zahlverständnis gesehen werden.⁷⁷

⁷¹ SCHIPPER 2009, S. 36

⁷² vgl. SCHIPPER 2009, S. 36; LAUTER 1991, S. 23; SCHERER & MOSER OPITZ, S. 86 f.

⁷³ 2011, S. 5 f.

⁷⁴ 2009, S. 33

⁷⁵ vgl. GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 44 f.

⁷⁶ 2003, S. 223

⁷⁷ vgl. SCHIPPER 2003, S. 223; LORENZ 2011, S. 42

KRAUTHAUSEN und SCHERER⁷⁸ sprechen in Bezug darauf von einem aktiven kognitiven Vorgang, durch den in eine konkrete Situation erst die mathematische Struktur hineingelesen werden muss. Eine direkte Verbindung zwischen dem Denken des Kindes, bzw. dem Aufbau von Verständnis, und dem Hantieren mit Arbeitsmittel ist demnach nicht gegeben, und so verspricht selbst eine perfekte Darstellung nicht, dass das Lernen dadurch weniger herausfordernd ist.

Ziel jeglicher Verwendung von Arbeitsmitteln ist der Auf- und Ausbau von inneren Vorstellungsbildern mathematischer Inhalte. Da diese aber durch vorangegangene Erfahrungen und bereits aufgebautes Wissen und Verständnis beeinflusst werden, können Kinder durch die Verwendung derselben Materialien trotzdem unterschiedliche „mentale Bilder“⁷⁹ entwickeln. Voraussetzung für die Konstruktion mathematischen Wissens ist demnach, dass im Material das aus mathematischer Sicht Wesentliche (die Struktur bzw. der mathematische Begriff) erkannt und herausgefiltert wird. Dabei ist auch wünschenswert, dass unterschiedliche Interpretationen derselben Darstellung möglich sind und bewusst erarbeitet werden.⁸⁰

Wurden die Strukturen der Arbeitsmittel erkannt, so müssen durch Reflexion und Nachdenken Konzepte auf der mentalen Ebene entwickelt werden. Hilfreich dabei ist das parallele bzw. die Handlung begleitende verbale Beschreiben der Tätigkeit und deren Ergebnisses. Wie die dabei vorgestellte Materialmanipulation gedanklich aussieht, kann von Kind zu Kind sehr verschieden sein. Anschließend sollten diese Vorstellungen die Arbeit mit Materialien allerdings ersetzen. Denken ist darauf aufbauend das Operieren mit diesen Vorstellungen, wodurch ohne Vorhandensein konkreter Gegenstände Wissen konstruiert wird.⁸¹

WARTHA und SCHULTZ⁸² beschreiben für den Verinnerlichungsprozess von Handlungen vier Phasen, die den Weg von konkreten zu mentalen Operationen und somit den Aufbau von Grundvorstellungen unterstützen können. In ihren Augen ist ebenfalls wesentlich, dass die Konventionen und Eigenschaften des verwendeten Materials bereits erkannt wurden. Auch räumen sie dem Versprachlichen der Handlung eine wesentliche Rolle ein. Außerdem sollte das Modell nicht als

⁷⁸ 2007, S. 243

⁷⁹ KRAUTHAUSEN & SCHERER 2007, S. 244

⁸⁰ vgl. KRAUTHAUSEN & SCHERER 2007, S. 244 ff.

⁸¹ vgl. LORENZ 2011, S. 42; SCHIPPER 2003, S. 232

⁸² 2011, S. 11 ff.

Stufenmodell interpretiert werden, da viele Kinder direkt aus konkreten Materialhandlungen ein mentales Konzept aufbauen. Besonders für leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler sei aber das Durchlaufen aller Phasen im Zuge des Unterrichts wesentlich, um den Aufbau von Grundvorstellungen bestmöglich zu unterstützen.

1	<i>Das Kind handelt am geeigneten Material.</i> Die mathematische Bedeutung der Handlung wird beschreiben. Zentral: Versprachlichen der Handlung und der mathematischen Symbole.
2	<i>Das Kind beschreibt die Materialhandlung mit Sicht auf das Material.</i> Es handelt jedoch nicht mehr selbst, sondern diktiert einem Partner die Handlung und kontrolliert den Handlungsprozess durch Beobachtung.
3	<i>Das Kind beschreibt die Materialhandlung ohne Sicht auf das Material.</i> Für die Beschreibung der Handlung ist es darauf angewiesen, sich den Prozess am Material vorzustellen.
4	<i>Das Kind arbeitet auf symbolischer Ebene, übt und automatisiert.</i> Gegebenenfalls wird die entsprechende Handlung in der Vorstellung aktiviert.

Tabelle 1: Vierphasenmodell des Aufbaus von Grundvorstellungen nach WARTHA und SCHULZ⁸³

3.4 Entwicklung von Stellenwertverständnis

3.4.1 Stellenwertverständnis aufbauen

3.4.1.1 Voraussetzungen

Um ein erstes Stellenwertverständnis zunächst im Zahlenraum 100 sinnvoll erarbeiten zu können, gibt es wesentliche Grundlagen, die die Kinder beherrschen müssen. Notwendig ist ein Verständnis von Zahlen als Zusammensetzungen aus anderen Zahlen. Auch sollten in diesem Bereich die Grundaufgaben und Zahlenzerlegungen großteils gefestigt sein. Abgesehen davon ist wünschenswert, dass Kinder zu diesem Zeitpunkt bereits das Aufsagen der Zahlwortreihe bis 20 beherrschen und Mengen in diesem Zahlenraum mit Fokus auf die Anzahl abzählen können.⁸⁴

⁸³ 2011, S. 11

⁸⁴ vgl. GAIDOSCHIK 2003b, S. 183

3.4.1.2 Mehrstellige Zahlen als Ganzheit

Wesentlich ist, dass Kinder zweistellige Zahlen auch als „zwei-stellig, als Zusammensetzung aus Zehnern und Einern wahrnehmen“⁸⁵. Anfangs unterscheiden sich diese für Schülerinnen und Schüler nicht von einstelligen Zahlen, da sie sie nur als weitere Zahlwörter lernen, die in einer Reihe aufgesagt werden. Ohne angeleitete Erarbeitung wird dabei aber für manche Kinder nicht deutlich, dass sich bei 10 etwas ändert.⁸⁶

Auch SCHIPPER⁸⁷ beschreibt, dass sich zweistellige Zahlen in dieser Anfangsphase in ihrer Qualität nicht von 3 oder 9 unterscheiden, sondern als unstrukturierte Ganzheiten interpretiert werden.

Zu diesem Zeitpunkt können Kinder auch zwischen den Ziffern der Zahl und den Teilmengen meist nur einen Zusammenhang herstellen, wenn die Mengen durch Zehnerstangen und Einerwürfel dargestellt sind. Ist dies nicht der Fall, misslingt das Herstellen einer Verbindung, da die Schülerinnen und Schüler nicht wissen, aus wie vielen Einern ein Zehner zusammengesetzt wird.⁸⁸

3.4.1.3 Integration von Konzepten und Prozeduren

Um ein gesichertes Stellenwertverständnis aufzubauen, müssen neue Aspekte in bereits vorhandenes Wissen über Zahlen und Mengen integriert werden. Dabei spielen „konzeptuelles Wissen über Zehner und Einer und prozedurales Wissen darüber, wie Zahlwörter gebildet und Zahlen geschrieben werden,“⁸⁹ eine wichtige Rolle. Kinder müssen sich eine Zahl, wie in Abbildung 3 erkennbar, auf verschiedenen Arten vorstellen und diese auch begreifen können.⁹⁰

⁸⁵ GAIDOSCHIK 2009, S. 12

⁸⁶ vgl. GAIDOSCHIK 2009, S. 12 ff.

⁸⁷ vgl. SCHIPPER 2009, S. 120

⁸⁸ vgl. GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 81 f.

⁸⁹ GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 82

⁹⁰ vgl. GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 82 ff.

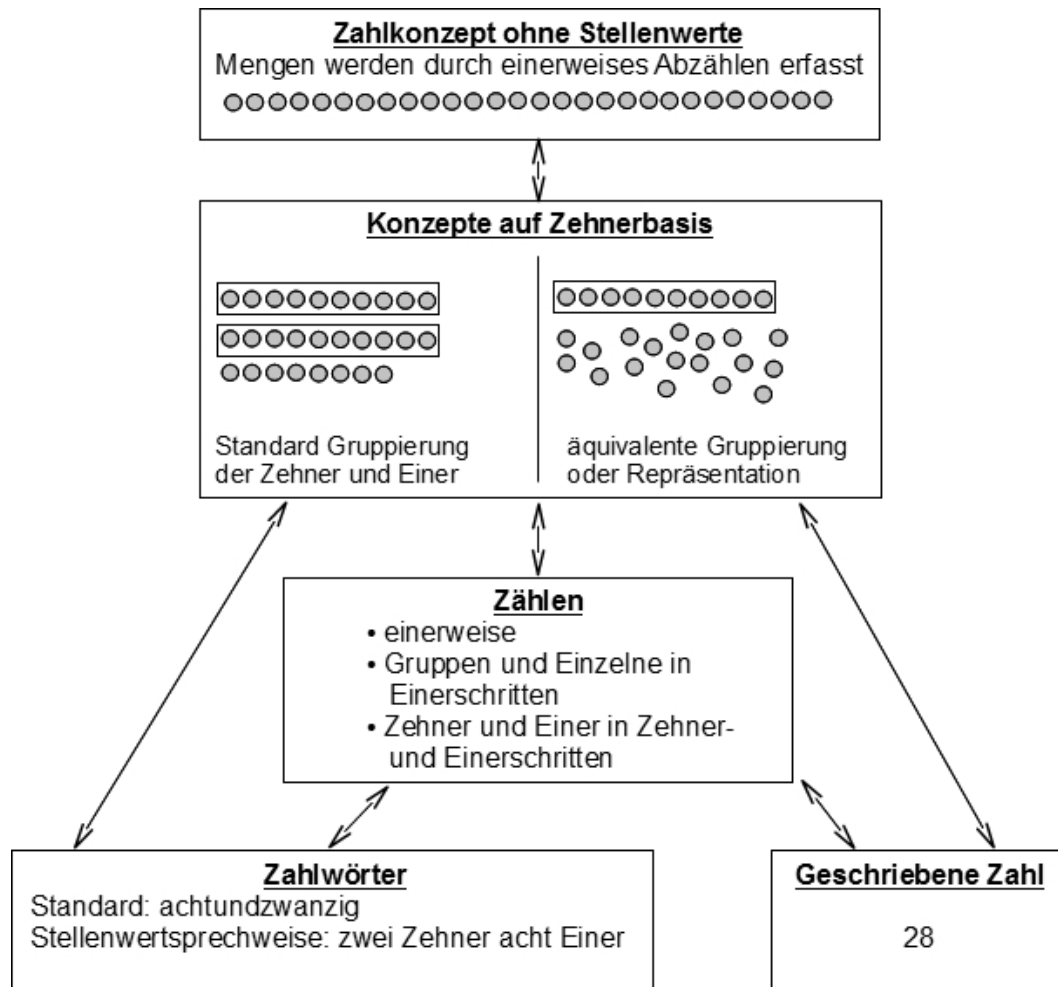


Abbildung 3: Stellenwertverständnis als Integration von Konzepten auf Zehnerbasis mit Sprechweise und Schreibweise von Zahlen, vermittelt durch verschiedenartige Darstellungen derselben Zahl und verschiedenartige Zählweisen⁹¹

Aufbauend auf die Voraussetzung eines Verständnisses von Zahlen als Zusammensetzungen aus anderen Zahlen müssen Kinder nun Zehnergruppen als Teilmengen einer Zahl erkennen und konstruieren können. Dazu ist es notwendig, die „Bildung von Zehnergruppen zur neuartigen Darstellung einer Zahl ... konzeptuell mit dem Verständnis der Zahl als Zusammensetzung aus anderen Zahlen in Beziehung“⁹² zu bringen. Ein Zehner muss dafür als Einheit erkannt werden, die sich aus zehn anderen Einheiten („Einern“) zusammensetzt. Oft wird die neue Bündelung allerdings als von der bereits bekannten Einheit unabhängig konstruiert. In diesem Fall können die Kinder in Zehnerschritten weiterzählen, Strukturanalogien in jedem Zehnerbereich erkennen und zweistellige Zahlen in Zehner und Einer zerlegen. Auch

⁹¹ vgl. GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 83

⁹² GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 87

ist es ihnen möglich, Zehnerbündelungen als Vielfache von Zehn abzuzählen („zehn, zwanzig, dreißig, ...) und Einer zu ergänzen. Das Bewusstsein, dass ein Zehner aus zehn Teilen besteht, fehlt ihnen allerdings. Deshalb können sie zum Beispiel nicht erklären, wie viele Zehnerkartons man mit 67 Eiern füllen kann, und scheitern ebenso bei Rechenaufgaben, die das Entbündeln, das Zerlegen eines Zehners in zehn Einer, fordern. Diese Schwierigkeiten weisen darauf hin, dass die neue Zahlvorstellung als Zusammensetzung aus Einern und Zehnern neben der Vorstellung als homogene Menge von Einern existiert, anstatt in diese integriert zu sein.⁹³

Einem fundierten Stellenwertverständnis ist das Kind dann näher gekommen, wenn es einen Zehner als Einheit erkennt, die aus zehn Einern zusammengesetzt ist. Diese Vorstellung kann anfangs noch an Material gebunden sein, wodurch Aufgaben, für die zum Beispiel das Entbündeln eines Zehners notwendig ist, nur auf der enaktiven Ebene gelöst werden können.⁹⁴

Von einem gesicherten Stellenwertverständnis kann erst dann gesprochen werden, wenn Kinder unabhängig von Material die Vorstellung besitzen, dass zum Beispiel drei Zehner ident mit dreißig Einern, zwei Zehnern und zehn Einern sowie einem Zehner und zwanzig Einern sind. Dieses abstrakte Wissen können sie auch beim Rechnen und Problemlösen gezielt einsetzen.⁹⁵

Um Einsicht in das Stellenwertsystem zu erlangen, ist es außerdem wesentlich, dass Anschauungen und Veranschaulichungen auf der enaktiven bzw. der ikonischen Ebene immer in Verbindung zur symbolischen Notation der Zahlen gebracht werden. Erst dadurch können gedankliche Vernetzungen entstehen, die für das Verständnis der Prinzipien des dezimalen Stellenwertsystems – besonders des Positionsprinzips – notwendig sind. Deshalb sollte zum Beispiel Arbeit mit Dienes-Material mit der Notation in Stellenwerttabellen einhergehen. Dabei werden Mengen durch Einerwürfel, Zehnerstangen und Hunderterplatten, die bezüglich ihrer Volumina proportional zueinander sind, konkret dargestellt. Die passenden Ziffernfolgen werden in einer Tabelle notiert, deren Spalten durch die Buchstabenbezeichnungen für die Stellenwerte definiert sind.⁹⁶

⁹³ vgl. SCHIPPER 2009, S. 120 f.; GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 86 ff.; GAIDOSCHIK 2009, S. 14

⁹⁴ vgl. GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 89 ff.

⁹⁵ vgl. GAIDOSCHIK 2009, S. 14; GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 92 f.; SCHIPPER 2009, S. 121;

⁹⁶ vgl. SCHERER & MOSER OPITZ 2010, S. 141 f.

3.4.2 Mögliche Schwierigkeiten

Dass Einsicht in den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems eine große kognitive Leistung ist, zeigt sich besonders bei Schwierigkeiten beim Bündeln und Entbündeln sowie beim Verständnis des Stellenwertprinzips oder des Zahlenstrahls. Da diese Einsicht aber weitreichende Folgen in Bezug auf das Erkennen von Zahlbeziehungen und Grundlagen für Rechenstrategien sowie den Umgang mit Skalen hat, sollte man sich als Lehrperson der möglichen Klippen beim Aufbau eines fundierten Stellenwertverständnisses bewusst sein.⁹⁷

3.4.2.1 Häufige Schwierigkeiten beim Verständnis der Prinzipien des Stellenwertsystems

Welche grundlegenden Probleme bei Kindern in Bezug auf das Stellenwert- und das Bündelungsprinzip auftreten können, sollen einige Beispiele verdeutlichen.⁹⁸ Die Zahlen zusammengesetzt aus 1 Tausender, 3 Hundertern und 4 Einern sowie 2 Hundertern, 13 Zehnern und 4 Einern sollen in einer Stellenwerttabelle sowie außerhalb derselben notiert werden. Folgende Lösungen fand eine Schülerin im siebenten Schuljahr:

Zahl in der Stellentafel:	Die Zahl heißt:	Zahl in der Stellentafel:	Die Zahl heißt:																
<table border="1"> <tr> <th>T</th><th>H</th><th>Z</th><th>E</th></tr> <tr> <td>1</td><td>3</td><td></td><td>4</td></tr> </table>	T	H	Z	E	1	3		4	<u>134</u>	<table border="1"> <tr> <th>T</th><th>H</th><th>Z</th><th>E</th></tr> <tr> <td></td><td>2</td><td>13</td><td>4</td></tr> </table>	T	H	Z	E		2	13	4	<u>2134</u>
T	H	Z	E																
1	3		4																
T	H	Z	E																
	2	13	4																

Abbildung 4: Notation einer Schülerin von Zahlen innerhalb und außerhalb der Stellenwerttafel⁹⁹

Die Schülerin kann die Zahlen zwar richtig in die Stellenwerttabellen eintragen, hat aber Schwierigkeiten, diese außerhalb der Tabellen richtig zu notieren. Ihr ist nicht bewusst, dass sie für einen leeren Stellenwert innerhalb einer Zahl eine Null notieren muss, da es sonst zur Verschiebung der Stellenwerte kommt. Umgekehrt zu Aufgaben dieser Art treten auch oft Schwierigkeiten auf, wenn Zahlen mit unbesetzten Stellenwerten in dieselben zerlegt werden sollen. So könnte zum Beispiel 407 in der Stellenwerttabelle als 4 Zehner und 7 Einer notiert werden. Das zweite Beispiel zeigt, dass sie 13 Zehner nicht korrekt deuten kann. Demnach

⁹⁷ vgl. SCHERER & MOSER OPITZ 2010, S. 14

⁹⁸ vgl. SCHERER & MOSER OPITZ 2010, S. 134

⁹⁹ SCHERER & MOSER OPITZ 2010, S. 134

müsste sie 10 Zehner zu 1 Hunderter bündeln und diesen zu den bereits vorhandenen Hundertern addieren.¹⁰⁰

Um Aufgaben dieser Art lösen zu können, muss das Kind bereits ein hohes Maß an Einsicht gewonnen haben. Dass für die - in der Stellenwerttabelle noch durchwegs zulässige und korrekte - Notation der Zahl in reiner Ziffernotation ohne Tabelle zunächst gebündelt werden muss, ist nur auf die Prinzipien unseres Stellenwertsystems zurückzuführen.¹⁰¹

Schwierigkeiten bei der Einsicht in das Bündelungsprinzip zeigen sich auch bei Aufgaben, bei denen die Kinder zum Beispiel erklären müssen, wie viele Zehnerkartons sie mit 124 Stück füllen können. Probleme beim Entbündeln können sich auch beim schriftlichen und mündlichen Rückwärtszählen zeigen, wenn bei der Unterschreitung an einem oder auch mehreren Stellenwerten aufgebrochen werden muss. Ebenso können Aufgaben wie „Was ist die Hälfte von 30?“ mangelnde Einsicht in das Bündelungsprinzip verdeutlichen. Sehen Kinder 30 nur als drei Zehner, erkennen aber keine Möglichkeit, diese teilweise oder ganz in Einer zu entbündeln, werden sie 30 nicht problemlos halbieren können.¹⁰²

Probleme können auch bei Mächtigkeitsvergleichen mehrstelliger Zahlen auftreten. Haben Zehner und Einer für Kinder keinen Unterschied in ihrer Wertigkeit, so kann es durchaus vorkommen, dass „59“ mehr als „61“ ist, weil zum Größenvergleich die größere Ziffer unabhängig vom Stellenwert herangezogen wird.¹⁰³

3.4.2.2 Diskrepanz zwischen Schreib- und Sprechweise – inverse Schreibweise

Welche Herausforderungen die Zahlwortbildung der deutschen Sprache mit sich bringt, wurde bereits erläutert.¹⁰⁴ In Tabelle 2 werden diese Herausforderungen deutlich gemacht. Dabei ist gut zu erkennen, dass in den Bereichen Hören, Denken, Sprechen und Lesen gegen die übliche Schreibrichtung gearbeitet bzw. gedacht werden muss.¹⁰⁵

¹⁰⁰ vgl. SCHERER & MOSER OPITZ 2010, S. 134 f.

¹⁰¹ vgl. GAIDOSCHIK 2011, S. 96

¹⁰² vgl. SCHERER & MOSER OPITZ 2010, S. 135 ff.

¹⁰³ vgl. GAIDOSCHIK 2011, S. 45, 50

¹⁰⁴ vgl. Kapitel 2.4

¹⁰⁵ vgl. JACOB 2008, S. 36

sehen	hören	denken	sprechen	lesen	schreiben
21	21	21	21	21	21
➡	➡	➡	➡	➡	➡
zwanzigeins	einundzwanzig	einundzwanzig	einundzwanzig	einundzwanzig	zwanzigeins

Tabelle 2: Ist-Zustand der inversen Schreib- und Sprechweise¹⁰⁶

Ungefähr bei der Hälfte aller Schülerinnen und Schüler werden nach KLÖCKENER¹⁰⁷ anfängliche Schwierigkeiten beim Lesen und Schreiben zweistelliger Zahlen vermutet. Um der Herausforderung der Diskrepanz zwischen Schreib- und Sprechweise von Zahlen in der deutschen Sprache gerecht werden zu können, sollte allerdings zuerst die Unterscheidung zwischen Zehnern und Einern gefestigt sein. Bei Berücksichtigung der Regeln und Ausnahmen der Zahlwortbildung kann dann reflektiertes Lesen und Schreiben zwei- und mehrstelliger Zahlen gelingen.¹⁰⁸

Viele Kinder, die mit der Übersetzung mehrstelliger Zahlwörter in Ziffernfolgen überfordert sind, eignen sich - oft auch auf Ratschlag der Eltern – eine inverse Zahlenschreibweise an. Darunter versteht man, dass Schülerinnen und Schüler die Ziffern der jeweiligen Stellenwerte statt von links nach rechts in der Reihenfolge aufschreiben, in der sie diese hören. Dies sollte aber auf jeden Fall vermieden werden, da unter anderem die Verwirrung durch unterschiedliche Anweisungen, wie Zahlen notiert werden sollten, immer größer werden kann. Es kann auch dazu führen, dass mehr Zahlendreher produziert werden. Die Differenzierung zwischen Zehner und Einer rückt dabei deutlich in den Hintergrund, da am Sprachklang und nicht an den Stellenwerten orientiert geschrieben wird. Abgesehen davon wird das Problem bei größeren Zahlen wie zum Beispiel 24.587 nur verschärft, da auch immer mehr Lücken beim Aufschreiben in gesprochener Reihenfolge der Stellenwerte berücksichtigt werden müssen. Weiters stellt die inverse Zahlenschreibweise bei der Eingabe von Zahlen mit Hilfe von Tastaturen ein Problem dar, da in diesem Fall die Ziffern unbedingt von der größten zur kleinsten Stelle getippt werden müssen.¹⁰⁹

3.4.2.3 Zahlendreher und falsches Verknüpfen von Stellenwerten

Zwar können Zahlendreher auch schon bei der Zahlauffassung, der Übersetzung konkreter Darstellungen in Ziffernfolgen und Zahlwörtern, und der Zahldarstellung, dem umgekehrten Weg, entstehen, auffälliger sind diese aber beim Lösen von

¹⁰⁶ JACOB 2008, S. 36

¹⁰⁷ 1990, zit. in SCHIPPER 2009, S. 125

¹⁰⁸ vgl. GAIDOSCHIK 2003a, S. 144 ff.; SCHIPPER 2009, S. 125

¹⁰⁹ vgl. SCHIPPER 2009, S. 125; GAIDOSCHIK 2011, S. 91

Operationen. Charakteristisch dafür ist, dass die Ziffern beim Rechnen vertauscht und dadurch die Stellenwerte nicht richtig verknüpft werden. So können zum Beispiel beim Notieren des Ergebnisses ($38 + 26 = 46$) oder bei der Auffassung eines Summanden ($24 + 53 = 59$) die Ziffern vertauscht werden. Durch mehrfache und konsequente Zahlendreher innerhalb einer Rechnung können allerdings auch wieder richtige Lösungen entstehen, obwohl die Zahlen falsch interpretiert wurden (zum Beispiel $85 - 62 = 23$ gedacht als $58 - 26 = 32$). Ursache dafür könnte die Schwierigkeit der Zahlwortbildung der deutschen Sprache sein¹¹⁰, wenn diese im Zuge des Schreiben und Lesens von Zahlen entstehen.¹¹¹

3.4.3 Erarbeitungsmaterialien im Bereich des Dezimalsystems

3.4.3.1 Grundlagen und Begriffsklärung

In der Fachliteratur werden für Materialien, die im Mathematikunterricht verwendet werden, uneinheitliche Begriffe und Definitionen verwendet. KRAUTHAUSEN und SCHERER¹¹² unterscheiden unter anderem zwischen Mitteln zur Anschauung und solchen zur Veranschaulichung. Unter Veranschaulichungsmitteln werden jene Materialien verstanden, die die Lehrperson zur Darstellung und Repräsentation bestimmter mathematischer Inhalte einsetzt. Hingegen werden Anschauungsmittel von Lernenden selbst zur Re- und Konstruktion mathematischen Verständnisses angewendet. Da Anschauung grundlegend für den Erkenntnisprozess ist, ist die Verwendung solcher Materialien für alle Kinder elementar. Wesentlich dabei ist aber, dass diese nicht **nur** zur Veranschaulichung **oder** zur Anschauung im Unterricht Verwendung finden. Schülerinnen und Schüler müssen derart mit den Strukturen der Arbeitsmittel und dem Umgang mit den Materialien vertraut gemacht werden, dass die Materialien und Darstellungsmittel nach anfänglicher Demonstration auch von den Lernenden selbst zum Aufbau von Verständnis oder zur Veranschaulichung und Argumentation eigener Rechenwege genutzt werden können. Da deshalb keine genaue Zuweisung einzelner Materialien möglich ist und auch besonders auf die Handlungen mit den Materialien Wert gelegt wird, wird in dieser Arbeit in Anlehnung an GAIDOSCHIK¹¹³ von „Erarbeitungsmaterial“ gesprochen.

¹¹⁰ vgl. Kapitel 3.4.2.2

¹¹¹ vgl. GAIDOSCHIK 2003a, S. 144; SCHIPPER 2009, S. 125 f.

¹¹² 2007, S. 242 f.

¹¹³ 2011, S. 73

Die Zahl und Vielfalt der für den Aufbau von mathematischem Wissen angebotenen Materialien nimmt stetig zu. Gerade deshalb ist es notwendig, als Lehrperson die Auswahl und den Einsatz unterschiedlicher Arbeitsmittel reflektiert und kritisch zu hinterfragen.¹¹⁴ Im folgenden Abschnitt werden deshalb ausgewählte Arbeitsmittel in Bezug auf ihren unterstützenden Einsatz beim Aufbau von Stellenwertverständnis vorgestellt und ihre Vor- und Nachteile analysiert.

3.4.3.2 Steckwürfel

Für den ersten Einstieg in das Bündelungsprinzip sind nach GAIDOSCHIK¹¹⁵ Steckwürfel gut geeignet. Dabei handelt es sich um Würfel aus Plastik, die zu einer Stange oder auch anderen Körpern verbunden werden können. Die Kinder bilden dabei die notwendigen Zehnerstangen **selbst**, was hilfreich sei, um erstes Verständnis für Zehner entwickeln zu können. Der Aufbau eines kardinalen Zahlverständnisses steht bei diesem Material im Vordergrund.

3.4.3.3 „Dienes-Material“ oder „Mehrsystemblöcke“

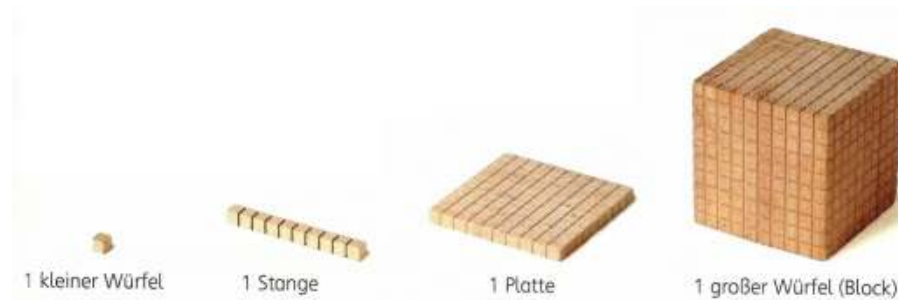


Abbildung 5: Dienes-Material¹¹⁶

Dienes-Material besteht aus Einerwürfeln, Zehnerstangen, Hunderterplatten und Tausenderwürfel, deren Größen proportional zueinander sind. Auf diese Weise kann gut veranschaulicht werden, woraus sich die nächstgrößere Einheit zusammensetzt. Die fortgesetzte Bündelung kann gedanklich auch bis zu einer Zehntausenderstange, einer Hunderttausenderplatte oder einem Millionenwürfel übertragen werden. Der kardinale Aspekt steht auch bei diesem Material im Vordergrund.¹¹⁷

¹¹⁴ vgl. KRAUTHAUSEN & SCHERER 2007, S. 240

¹¹⁵ 2003b, S. 184 f.; 2007 S. 168

¹¹⁶ WITTMANN & MÜLLER 2011, S. 29

¹¹⁷ vgl. SCHERER & MOSER OPITZ 2010, S. 142

Durch die fixierte Einheit der Zehner, Hunderter und Tausender, die nicht einfach zerlegt werden können, entspricht die Struktur des Materials sehr genau den Anforderungen, die auch das Stellenwertsystem bei Aufgaben mit Unter- oder Überschreitungen vorgibt. So kann der Zehner gegebenenfalls nicht einfach zerlegt werden, sondern muss in zehn Einer umgetauscht werden. An die Bündelung erinnern Rillen, die an allen Teilen dieses Materials die enthaltenen Einer andeuten.¹¹⁸

3.4.3.4 Hunderter-Rechenrahmen

Der Hunderter-Rechenrahmen besteht aus zehn an einem Rahmen fixierten Reihen, auf denen je zehn verschiebbare Kugeln befestigt sind. Außerdem ist er meistens farblich in vier Felder der Größe 5 mal 5 untergliedert. SCHIPPER¹¹⁹ empfiehlt die Verwendung eines Rechenrahmens dieser Größe, um das Stellenwertverständnis zu fördern. Er betont aber, dass die darin enthaltene dezimale Struktur zunächst unter anderem durch Blitzblickübungen erarbeitet werden müsse. Darunter versteht man Übungen, bei denen Zahldarstellungen nur für eine sehr kurze Zeit sichtbar sind. Danach muss das Kind die Anzahl nennen und begründen können, wie es diese erkannt hat. Auch zur Erarbeitung von additiven Rechenaufgaben mit und ohne Zehnerübergang empfiehlt SCHIPPER¹²⁰ die Verwendung des Hunderter-Rechenrahmens.

GAIDOSCHIK¹²¹ kritisiert in Bezug auf den Rechenrahmen einige Punkte, wenn dieser beim Aufbau von Stellenwertverständnis eingesetzt wird. Zwar fördere das Material kein rein ordinales Zahlverständnis, dennoch können Kinder einen Zehner auch nur durch Zählen – nicht als Einheit – wahrnehmen. Unter ordinalem Zahlverständnis versteht man, dass eine Zahl nicht als Gesamtheit, sondern als Rangplatz einer Reihe verstanden wird.¹²² Selbst wenn Kinder am Rechenrahmen Zehner gebündelt als „alle Kugeln einer Reihe“ verstehen und beim Rechnen mit Kugelpaketen an Stelle von einzelnen Kugeln arbeiten, ist nach GAIDOSCHIK¹²³ aber nicht gewährleistet, dass diese Einsicht auch bei Rechenoperationen bedacht wird. So kann die Aufgabe $40 - 5$ anders als mit Mehrsystemblöcken am

¹¹⁸ vgl. GAIDOSCHIK 2003a, S. 140; GAIDOSCHIK 2007, S. 168 f.

¹¹⁹ 2009, S. 122

¹²⁰ 2009, S. 128 f.

¹²¹ 2003a, S. 142

¹²² vgl. GAIDOSCHIK 2011, S. 28 f.

¹²³ 2003a, S. 142

Rechenrahmen auch ohne *bewusstes* Entbündeln eines Zehners gelöst werden und unterscheidet sich dadurch strukturell nicht von der Aufgabe 45 – 5. In beiden Fällen können ohne weitere Einsichten 5 Kugeln verschoben werden. Was Verständnis für das Dezimalsystem angeht, sind diese beiden Aufgaben allerdings grundverschieden, da bei der Aufgabe 40 – 5 ein Zehner in zehn Einer umgetauscht werden muss, um die Operation durchführen zu können.

3.4.3.5 Hunderterfeld

Beim Hunderterfeld handelt es sich um ein quadratisches Feld, auf dem 10 mal 10 Punkte dargestellt sind. Bei dieser Art der Veranschaulichung steht ebenfalls der kardinale Zahlaspekt im Vordergrund. Sie eignet sich zur Entwicklung einer Größenvorstellung, zum strukturierten Ablesen und Darstellen von Zahlen (zum Beispiel Blitzblickübungen) sowie zum Zerlegen des Hunderters in Teilmengen.¹²⁴

Vom Rechnen mit Hilfe des Hunderterfeldes sollte allerdings abgesehen werden, da dadurch meist zum zählenden Rechnen verleitet wird und ordinale mit kardinalen Zahlvorstellungen vermischt werden.¹²⁵

3.4.3.6 Hundertertafel

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Abbildung 6: Hundertertafel

¹²⁴ vgl. SCHERER & MOSER OPITZ 2010, S. 137

¹²⁵ vgl. SCHIPPER 2003, S. 232 ff.

Die Hundertertafel besteht aus 10 Reihen zu je 10 Feldern, in die die Zahlen von 1 bis 100 in Ziffernschreibweise meist von links oben nach rechts unten ansteigend eingetragen sind. Auch sind Hundertertafeln mit ansteigender Anordnung der Zahlen von links unten nach rechts oben im Mathematikunterricht vermehrt anzutreffen. Bei beiden Darstellungsformen steht der ordinale Zahlaspekt im Vordergrund. Durch diese Veranschaulichung können Gesetzmäßigkeiten im Zahlenaufbau und in der Schreibweise der Zahlen deutlich gemacht werden. Auch kann sie zum Entdecken von Strukturen und Mustern verwendet werden.¹²⁶

Kritisch hingegen sieht unter anderem GAIDOSCHIK¹²⁷ die Verwendung der Hundertertafel für den Aufbau von Stellenwertverständnis bzw. zur Orientierung im Zahlenraum. Durch die Anordnung der Zahlen werden wichtige Nachbarschaftsbeziehungen deutlich verzerrt, da zum Beispiel 90 näher bei 80 als bei 91 liegt. Auch zum Rechnen sollte die Hundertertafel nicht verwendet werden, da sie zählendes Rechnen provoziere. Bestenfalls werde durch Zählen in unterschiedliche Richtungen (oben/unten bzw. rechts/links) zwischen Einer- und Zehnerschritten unterschieden, aber auch diese Lösungsstrategie könnte an der Hundertertafel ohne Einsicht in das Dezimalsystem durchgeführt werden.

3.4.3.7 Zahlenstrahl

Ein fundiertes Verständnis des Zahlenstrahls ist besonders für den Umgang mit Größen und das Messen grundlegend. Auf einer Linie werden in regelmäßigen Abständen senkrechte Striche gezogen, die als Markierungen für die jeweiligen Zahlen dienen. Meistens sind nicht alle Zahlen beschriftet, da dies zu unübersichtlich wäre und zum zählenden Rechnen verleiten würde. Die Zwischenabstände müssen demnach richtig interpretiert werden, wobei dieselbe Abstandslänge bei unterschiedlichen Zahlenstrahlen für unterschiedliche große Einheiten stehen kann.¹²⁸ Diese Flexibilität in der Interpretation ist aber für das Verständnis des Dezimalsystems zentral. Außerdem muss darauf geachtet werden, dass der kardinale und der ordinale Zahlaspekt im Umgang mit diesem Arbeitsmittel in Verbindung gebracht werden. Kardinal werden die Anzahlen der Einheiten, das heißt der Abstände zwischen den Markierungen, gedeutet. Ordinal gesehen steht die Ordnung der Zahlen im Vordergrund, was für Übungen zur Orientierung im

¹²⁶ vgl. SCHERER & MOSER OPITZ 2010, S. 137

¹²⁷ 2003a, S. 141

¹²⁸ vgl. Abbildung 7

Zahlenraum (zum Beispiel Nachbarzehner, -hunderter, Zählen in Schritten) sehr nützlich sein kann.¹²⁹

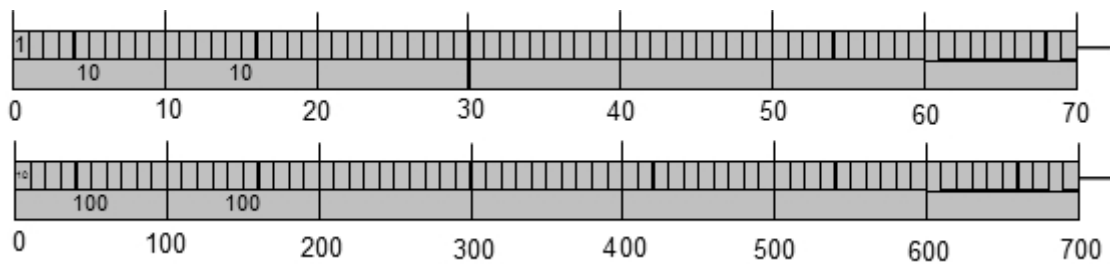


Abbildung 7: Zahlenstrahl als Längenmodell mit unterschiedlichen Deutungen durch unterschiedliche Beschriftungen¹³⁰

Gegen einen Einsatz des Zahlenstrahls vor Absicherung des Bündelungsprinzips spricht nach GAIDOSCHIK¹³¹, dass der Zahlenstrahl den Unterschied zwischen Zehnern und Einern gerade nicht verdeutlicht. Bei späterer Verwendung sei es wichtig, dass die Vorstellung der Zahlen am Zahlenstrahl als Längen¹³² abgesichert sei und die Länge der Strecke eines Zehners als aus zehn Einerstrecken zusammengesetzt interpretiert werde. Aufgaben mit Unterschreitung, die rechnerisch das Entbündeln fordern, können an einem vollständig nummerierten Zahlenstrahl aber ohne Einsicht in das Entbündeln zählend gelöst werden, da kein Unterschied darin besteht, ob ich innerhalb oder über den Zehner hinaus zähle. Zur Erarbeitung und Darstellung von Rechenstrategien wäre hingegen der Gebrauch eines Rechenstrichs sinnvoller. Darunter versteht man eine Strecke ohne definierte Einheiten, auf der Zahlen und Zwischenergebnisse markiert und Lösungsschritte durch Pfeile dargestellt werden können.

Als sinnvoll erachtet GAIDOSCHIK¹³³, nach der Absicherung des Verständnisses des Zahlenstrahls als Längenmodell, Übungen wie Mächtigkeitsvergleiche, Erarbeitung der Nachbarzehner bzw. Nachbarhunderter, Ergänzen auf Nachbarzehner, schrittweises Ergänzen oder Orientierungsübungen im Zahlenraum (zum Beispiel Markierungen suchen, die sich genau in der Mitte zwischen zwei Zahlen befinden). Ziel ist aber, wie bei allen Materialien, dass die Aufgaben letztendlich ohne konkrete Darstellung des Zahlenstrahls gelöst werden können. Der Zahlenstrahl sollte somit durch gezielte Schritte einer mentalen Vorstellung desselben weichen.

¹²⁹ vgl. SCHERER & MOSER OPITZ 2010, S. 138 f.

¹³⁰ vgl. SCHERER & MOSER OPITZ 2010, S. 139; GAIDOSCHIK 2011, S. 101

¹³¹ 2003a, S. 140

¹³² vgl. Abbildung 7

¹³³ 2011, S. 82 ff, S. 100 ff.

3.4.3.8 Rechengeld

Mit Rechengeld kann Bezug zum informellen Wissen des Kindes hergestellt werden, da bereits alle Schülerinnen und Schüler Erfahrungen mit Geld in ihrem Alltag gemacht haben. Durch das hohe Maß an Abstraktion können bei diesem Material allerdings Schwierigkeiten auftreten, da der Wert einer Münze oder eines Geldscheines weder durch Größe noch durch Beschaffenheit direkt ersichtlich ist. Auch sollte darauf geachtet werden, dass durch Fünferscheine oder Zweiermünzen unterschiedliche Bündelungen vorhanden sind. Um Rechengeld richtig interpretieren und anwenden zu können, muss deshalb bereits gewusst werden, welcher Schein wie vielen Scheinen einer kleineren Einheit entspricht. Das setzt bereits Verständnis des Dezimalsystems und Sicherheit in der Interpretation von symbolisch notierten Zahlen voraus. Übungen wie das Herausgeben von Geld bei Sachaufgaben können aber zum Beispiel die Einsicht in das Entbündeln fördern. Es sollte also kritisch beurteilt werden, wann sich der Einsatz von Rechengeld als sinnvoll erweist.¹³⁴

3.4.3.9 weitere Zahldarstellungen

Eine wesentliche Hilfe bei der Erarbeitung des Positionsprinzips ist die Stellenwerttabelle oder Stellentafel, die begleitend zur Materialhandlung angewendet wird¹³⁵. Bei dieser Form der symbolischen Notation werden die vorhandenen Mengen der einzelnen Stellenwerte in eine mit Anfangsbuchstaben der jeweiligen Einheiten beschriftete Tabelle eingetragen (E = Einer, Z = Zehner, H = Hunderter, T = Tausender). Diese kann auch beliebig in größere Zahlenräume erweitert werden (ZT = Zehntausender usw.). Bevor rein auf der symbolischen Ebene gearbeitet wird, können die Stellenwerte auch noch ikonisch dargestellt werden.¹³⁶

H	Z	E
3	2	5

Z	E
	

Z	E
	

	
3	1

Abbildung 8: Stellenwerttabelle symbolisch und halb-ikonisch¹³⁷

¹³⁴ vgl. SCHIPPER 2009, S. 123; SCHERER & MOSER OPITZ 2010, S. 145 f.

¹³⁵ vgl. Abbildung 8

¹³⁶ vgl. SCHIPPER 2009, S. 121; KRAUTHAUSEN & SCHERER 2007, S. 257 f.

¹³⁷ vgl. SCHIPPER 2009, S. 121

Um den Weg für Einsicht in das Positionsprinzip nicht zu versperren, muss die Stellenwerttabelle allerdings rechtzeitig durch die übliche symbolische Notationsform ersetzt werden. Durch gezielte und wiederholte Übungen mit wechselnder Darstellung muss erarbeitet werden, dass man sich an gewisse Regeln halten muss, um mehrstellige Zahlen auch außerhalb einer Tabelle eindeutig definiert aufschreiben zu können. Aufgaben wie zum Beispiel Notieren von 2 Zehnern und 14 Einern innerhalb und außerhalb einer Tabelle oder provokative Gleichsetzungen von zifferngleichen Zahlen („Ist 54 dasselbe wie 45?“) fördern diese Einsicht. Auch die Rolle der Null als Platzhalter für unbesetzte Stellenwerte kann auf diese Art erarbeitet werden.¹³⁸

Wesentlich ist, dass diese Übungen bei jeder Erweiterung des Zahlenraumes wiederholt durchgeführt werden. Auch dabei ist wichtig, dass es nicht zum gedankenlosen Eintragen in die Stellenwerttabelle kommt. Um den Zusammenhang zwischen Stellenwert und Bündelung zu verdeutlichen, ist abermals das Eintragen mehrstelliger Zahlen in eine Spalte der Stellenwerttafel eine Übung, die zum Denken anregt. So kann zum Beispiel darüber diskutiert werden, warum es sich bei diesen mathematisch durchaus korrekten Darstellungen immer um dieselbe Zahl handelt.¹³⁹

H	Z	E
3	2	4
		324
	32	4
2	12	4
	30	24

Abbildung 9: Unterschiedliche Darstellungen der Zahl 324 in der Stellentafel¹⁴⁰

Neben der Stellenwerttafel können auch andere Zahldarstellungen auf symbolischer und ikonischer Ebene, zwischen denen gewechselt wird, für die Entwicklung von Stellenwertverständnis hilfreich sein. So können Zahlen zum Beispiel als Zehner-Einer-Sequenzen ($386 = 3H \ 8Z \ 6E$) dargestellt und in reine Ziffernschreibweise übertragen werden. Abgesehen davon können auch ikonische Darstellungen des Dienes-Materials verwendet werden. Dabei wird eine Hunderterplatte durch ein

¹³⁸ vgl. GAIDOSCHIK 2003b, S. 186 f.; GAIDOSCHIK 2007, S. 166 ff.

¹³⁹ vgl. SCHERER & MOSER OPITZ 2010, S. 143 f.; SCHERER & STEINBRING 2004, S. 165 ff.

¹⁴⁰ vgl. SCHERER & MOSER OPITZ, S. 144

Quadrat, eine Zehnerstange durch einen Strich und ein Einerwürfel durch einen Punkt dargestellt.¹⁴¹

3.5 Ausgewählte Konsequenzen für den Unterricht

3.5.1 Zahlenräume ganzheitlich erweitern

Das Prinzip des Lernens in kleinen Schritten wurde im Laufe des Paradigmenwechsels vom Belehren zum Lernen als konstruktiv entdeckendem Prozess durch ganzheitlich orientierte Zugänge ersetzt. In Bezug auf die Arbeit am Verständnis des Dezimalsystems wird von der aktuellen Fachdidaktik deshalb in weitgehender Übereinstimmung empfohlen, von künstlich gesetzten Zahlenraumgrenzen abzusehen, da dadurch die Einsicht in die Prinzipien unseres Zahlensystems deutlich erschwert werde.¹⁴²

Für den Anfangsunterricht empfiehlt GAIDOSCHIK¹⁴³ deshalb, dass nach dem Durchdringen des Zahlenraums 10 der erste Einstieg in die Arbeit mit zweistelligen Zahlen nicht, wie meist üblich im Zahlenraum 20, sondern im Zahlenraum 99 erfolgen sollte. Zwar sollten in weiterer Folge die additiven Grundaufgaben im Zahlenraum bis 18 gefestigt werden, da ihre Beherrschung eine unverzichtbare Voraussetzung für das sichere und flexible Addieren und Subtrahieren in beliebigen Zahlenräumen darstelle. Für den Aufbau von Stellenwertverständnis stelle diese Begrenzung allerdings keine sachlich begründete Einheit dar, zumal sich die Aufgabe $13 + 3$ bei Einsicht in das Stellenwertsystem im Schwierigkeitsgrad nicht von $53 + 3$ unterscheidet. Vielmehr werde der Gedanke der fortlaufenden Bündelung erst klarer, wenn diese wiederholt – und nicht nur ein- oder zweimal – notwendig ist. Zu beachten ist dabei aber, dass in diesem Fall zu Beginn nur Einsicht in das Bildungsprinzip zweistelliger Zahlen, nicht das Rechnen damit, erarbeitet werden sollte.

Äquivalent dazu sollte der Zahlenraum 1000 ebenfalls als eine Einheit betrachtet und ganzheitlich erarbeitet werden. Neben der Einsicht in das additive Prinzip (zum Beispiel $3\text{H } 4\text{Z } 2\text{E} = 300 + 40 + 2$) sollte auch die in das multiplikative Prinzip eines Stellenwertsystems in diesem Zahlenraum gefestigt werden. Verstehen Kinder, was mit den einzelnen Stellenwerten passiert, wenn Zahlen zum Beispiel mit 10 oder 100

¹⁴¹ vgl. SCHIPPER 2009, S. 121 f.

¹⁴² vgl. KRAUTHAUSEN & SCHERER 2007, S. 112 f.

¹⁴³ vgl. GAIDOSCHIK 2007, S. 162 ff.

multipliziert oder dividiert werden, erlangen sie dadurch ein tieferes Verständnis des Stellenwertsystems. Auch bei dieser Erarbeitung ist die Stellentafel ein effektives Hilfsmittel. Nur vom „Anhängen“ oder „Weglassen“ der Null zu sprechen sollte unbedingt vermieden werden. Wesentlich sei vielmehr die Begründung und Erklärung, dass zum Beispiel durch Multiplikation mit 10 aus jedem Einer ein Zehner wird, aus jedem Zehner ein Hunderter usw.¹⁴⁴

Wurde der Zahlenraum bis 1000 gefestigt, sollte er aufgrund der Dreiergruppen in der Zahlwortbildung bis zur Million ganzheitlich erweitert werden. Dabei muss herausgearbeitet werden, dass die Zahlwortbildung im Bereich der drei Tausenderstellen analog zu der im Bereich der bereits vertrauten dreistelligen Zahlen erfolgt.¹⁴⁵

3.5.2 Bündelungsprinzip handelnd erarbeiten

Im Unterricht komme es nach GERSTER und SCHULTZ¹⁴⁶ immer noch häufig vor, dass Instruktionen seitens der Lehrpersonen im Vordergrund stehen. Besonders bei lernschwachen Schülerinnen und Schülern würden die Unterrichtenden immer wieder dazu neigen, ihnen durch Tipps und Regeln helfen zu wollen. Dadurch werde aber Einsicht und Verständnis noch schwieriger, da die Kinder dann größtenteils damit beschäftigt seien, sich an diese Anweisungen zu halten und sie auszuführen.

Insbesondere in Bezug auf Einsicht in das Bündelungsprinzip könne die Folge des oben genannten methodischen Fehlers sein, dass Kinder Zehner und Einer zwar mechanisch durch gebündelte Materialien darstellen können, nicht aber eine abstrakte Vorstellung davon aufbauen, dass ein Zehner aus zehn Einern besteht. Kritisch sollte deshalb beurteilt werden, ob Materialien, die eine fixe Zehnerbündlung aufweisen, immer und vor allem am Beginn von Vorteil sind.¹⁴⁷

GAIDOSCHIK¹⁴⁸ empfiehlt deshalb zum Einstieg in mehrstellige Zahlen Materialien, bei denen die Kinder Zehnerbündel selbstständig konstruieren müssen. Steckwürfel könnten gemeinsam mit einer Stellenwerttabelle verwendet werden, um die Fragen, wie zweistellige Zahlen aufgeschrieben werden und warum das so ist, zu klären. Wesentlich sei, dass zu diesem Zeitpunkt die komplizierte Benennung der Zahlen

¹⁴⁴ vgl. SCHIPPER 2009, S. 171 f.

¹⁴⁵ vgl. SCHIPPER 2009, S. 170 f.; WITTMANN & MÜLLER 1994, S. 109

¹⁴⁶ 2004, S. 99

¹⁴⁷ vgl. GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 94

¹⁴⁸ 2003b S. 184 f.

weitgehend ausgeblendet und der Fokus auf die Schreibweise und die Interpretation derselben gerichtet wird. Anschließend sollte die Frage der Notation und Darstellung zweistelliger Zahlen auch mit Material bearbeitet werden, das eine Bündelung vorgibt (zum Beispiel Mehrsystemblöcke), da dadurch das Tauschen von Einern in Zehner gefordert wird.

Oft erweisen sich aber Handlungen und Aufgaben, bei denen das Zusammenfassen von Materialien zu Zehnereinheiten im Vordergrund steht, nicht als ausreichend, um Verständnis für das Bündelungsprinzip aufzubauen. Wichtig dafür sind vor allem auch Aufgaben, die das Entbündeln fordern, wie beispielsweise die Aufgabe $50 - 3$. Dabei müssen von 5 Zehnerstangen 3 Einer weggenommen werden. Um dies möglich zu machen, muss getauscht werden, da die fixen Zehnerstangen nicht einfach zerlegt werden können. Ist diese Stufe abgesichert, wird dem Bündeln von zehn Einern zu einem Zehner im Zuge von additiven Aufgaben Aufmerksamkeit geschenkt. Da dies nur auf den Regeln unseres Dezimalsystems beruht, ist die weitaus größere Herausforderung zu erkennen, dass an einer Stelle höchstens 9 notiert und gegebenenfalls umgetauscht werden muss. Hilfreich ist es dabei, mit Material zu arbeiten, das auch fehlerhafte Lösungen wie $65 + 5 = 610$ zulässt, um anschließend darüber zu reflektieren.¹⁴⁹

3.5.3 Material und Darstellungen bewusst wählen und einsetzen

Arbeitsmittel und ihre Vor- und Nachteile wurden bereits in Kapitel 3.4.3 beschrieben. An dieser Stelle soll noch einmal dargestellt werden, was bei ihrem Einsatz allgemein beachtet werden muss.

Die Fachdidaktik sieht die weit verbreitete Meinung, dass Kinder aus einer großen Anzahl an Anschauungsmitteln selbst wählen können sollten, kritisch. Um gezielt das passende Material auswählen zu können, müssten Schülerinnen und Schüler bereits die Vor- und Nachteile sowie die Strukturen der jeweiligen Materialien kennen. Außerdem sind viele Handlungen nicht ohne weiteres von einem Material auf das andere übertragbar, weshalb vor allem bei lernschwachen Kindern ein häufiger Materialwechsel vermieden werden sollte.¹⁵⁰

Wesentlich ist außerdem, dass der Lehrperson bewusst ist, dass Veranschaulichungen und Anschauungsmaterialien zuerst selbst zum Lernstoff gemacht werden müssen. Erst wenn den Schülerinnen und Schülern die Strukturen

¹⁴⁹ vgl. GAIDOSCHIK 2011, S. 93 ff.

¹⁵⁰ vgl. LORENZ 2011, S. 40

und Eigenschaften eines Arbeitsmittels bekannt sind, kann ihnen dieses beim Aufbau von mathematischem Verständnis helfen. Die wohl überdachte Wahl der Anschauungsmittel ist dabei genauso wesentlich wie das Aufgabenformat, das zur Reflexion und zum Aufbau von Konzepten anregen soll. Dadurch kann eine Ablösung vom Material erreicht werden, wobei das sprachliche Begleiten der Handlung dabei eine zentrale Rolle einnimmt.¹⁵¹

Bei der Auswahl der Materialien und Zahldarstellungen muss darauf geachtet werden, welche Aktivitäten sich mit den gewählten Arbeitsmitteln sinnvoll durchführen lassen, um den Aufbau arithmetischer Konzepte zu unterstützen. So betonen zum Beispiel verschiedenen Darstellungen des Zahlenraums 100 unterschiedliche Zahlaspekte.¹⁵² Um die gewünschten Ziele zu erreichen, muss dies genauso berücksichtigt werden wie die Art, in der das Arbeitsmittel im Unterricht eingesetzt wird, und der Wissensstand, auf dem sich die Schülerinnen und Schüler befinden.¹⁵³

Grundlegend ist noch zu sagen, dass der Arbeit mit Materialien im Unterricht genügend Zeit gegeben werden muss. Zwar sollte darauf geachtet werden, dass diese nicht zur dauerhaften „Krücke“ werden, dennoch darf auch nicht zu früh auf die Darstellungsform auf enaktiver Ebene verzichtet werden. Können nicht ausreichend Erfahrungen gemacht werden, hindert dies vor allem lernschwache Schülerinnen und Schüler oft am Aufbau tragfähiger Vorstellungen. Dabei ist Geduld auf beiden Seiten, bei Lehrperson und Kind, gefordert.¹⁵⁴

3.5.4 Keine Routine bei Aufgabenformen

In vielen Lehrwerken findet man bei Übungen zum Übersetzen von einer Zahldarstellung in eine andere die Abbildungen der Stellenwerte (symbolisch oder ikonisch) stets in einer der Ziffernschreibweise entsprechende Reihenfolge vor. Die Aufgaben ■ IIII ·· entspricht 142 oder 1H 4Z 2E = 142 kann ein Kind aber auch lösen, ohne Einsicht in das dezimale Stellenwertsystem gewonnen zu haben. Zwar kann es dabei daran denken, dass die richtige Reihenfolge bei der Notation der Stellenwerte wichtig ist, sicher ist dies aber nicht, da es auch durch Abzählen und Notieren in angegebener Reihenfolge zur richtigen Lösung kommen kann.

¹⁵¹ vgl. GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 98; SCHERER & MOSER OPITZ 2010, S. 83 ff.

¹⁵² vgl. Kapitel 3.4.3

¹⁵³ vgl. SCHERER & MOSER OPITZ 2010, S. 85 bzw. 139 f.

¹⁵⁴ vgl. SCHERER & MOSER OPITZ 2010, S. 85 f.; KRAUTHAUSEN & SCHERER 2007, S. 254 f.

Wesentlich ist deshalb, dass bei Aufgabenstellungen bewusst die Reihenfolge der Stellenwerte vertauscht wird bzw. auch einmal Materialdarstellungen ungeordnet aufgezeichnet werden. Erst wenn ein Kind Aufgaben dieser Art größtenteils richtig in Ziffernschreibweise übersetzen kann, darf von Einsicht in das Positionsprinzip ausgegangen werden. Entstehen durch Regelverstöße gegen das Stellenwertprinzip unterschiedliche Übersetzungen von Zahldarstellungen in Ziffernfolgen, kann darüber reflektiert werden, was wiederum das Regelbewusstsein fördert.¹⁵⁵

Um ein gesichertes Verständnis des Dezimalsystems aufzubauen, ist es außerdem notwendig, eine Zahl in unterschiedlichen, bereits erarbeiteten Darstellungsformen veranschaulichen zu können. Durch die Vernetzung der verschiedenen Möglichkeiten, ein und dieselbe Zahl darzustellen, können die Beziehungen und Übergänge zwischen den Stellenwerten besser verstanden werden. Eine Übungsmöglichkeit wäre zum Beispiel, dass die Kinder eine Zahl des gerade behandelten Zahlenraums wählen und diese auf unterschiedliche Arten veranschaulichen bzw. darstellen. Dazu können verschiedene der in Kapitel 3.4.3 vorgestellten Materialien und Zahldarstellungen Anwendung finden, wodurch unter anderem auch ein flexibler Umgang mit den Arbeitsmitteln sowie das Erkennen von Gemeinsamkeiten derselben gefördert werden.¹⁵⁶

3.5.5 Umgang mit sprachlichen Schwierigkeiten

Um der Herausforderung der Bildung der Zahlwörter in der deutschen Sprache gewachsen zu sein, sollten die Kinder bereits Einsicht in die Interpretation von Zahlen, die in Form von Ziffernfolgen notiert sind, gewonnen haben. GAIDOSCHIK¹⁵⁷ empfiehlt, dass die Einer-Zehner-Sprechweise erst dann systematisch erarbeitet werden soll, wenn bei einer symbolisch dargestellten zweistelligen Zahl die Anzahl der Zehner und Einer genannt werden kann. Dabei sei es sinnvoll, zuerst den Regelfall und anschließend die bereits in Kapitel 2.4 angeführten Ausnahmen zu behandeln. Durchaus wünschenswert wäre dabei, dass den Kindern die „Dummheit der deutschen Sprache“¹⁵⁸ bewusst werde und sie diese auch sprachlich wiedergeben können. Gelingt das Lesen zweistelliger Zahlen, könne zum

¹⁵⁵ vgl. GAIDOSCHIK 2003a, S. 143; 2007, S. 169 f.

¹⁵⁶ vgl. SCHERER & STEINBRING 2004, S. 165 ff.; SCHERER & MOSER OPITZ 2010, S. 147

¹⁵⁷ 2003b, S. 188 f.; 2007, S. 171 ff.

¹⁵⁸ GAIDOSCHIK 2007, S. 172

Zahlendiktat übergegangen werden. Dabei sollte von Beginn an darauf geachtet werden, dass zuerst die Zehner und dann die Einer notiert werden.¹⁵⁹

Treten vor allem beim Aufschreiben gehörter Zahlen Probleme auf bzw. schreiben die Kinder die Zahlen konsequent invers, ist ein gezieltes Hörtraining anzuraten. Dabei sollen die Schülerinnen und Schüler bei vorgesprochenen zweistelligen Zahlen zunächst nur die Einer, dann nur die Zehner, danach Einer und Zehner in gehörter Reihenfolge und anschließend zuerst die Zehner und dann die Einer nennen. Erst danach werden die zugehörigen Ziffern auch notiert.¹⁶⁰ Hilfreich kann dabei der Taschenrechner sein, da bei diesem die Ziffern unbedingt in absteigender Reihenfolge der Stellenwerte eingegeben werden müssen.¹⁶¹

3.6 Resümee

Mathematisches Wissen kann unterschiedlich kategorisiert werden. Die Gemeinsamkeit der in einschlägiger Literatur vorfindlichen Definitionen liegt darin, dass die Gegenstände der Mathematik nicht sinnlich wahrnehmbar sind, dass das Entwickeln von Verständnis nicht unmittelbar beobachtet werden kann. Wesentlich ist für mathematisches Wissen, dass Beziehungen hergestellt und diese im Umgang mit Zahlen genutzt werden. Einem gedankenlosen Abhandeln von Prozeduren sollte im Unterricht gezielt entgegengewirkt werden. Außerdem ist auch der Bezug zur Lebenswelt der Kinder wichtig, da dadurch die Integration neuen Wissens in bereits vorhandene Konzepte erleichtert werden kann.

Lernen wird in der aktuellen Fachdidaktik als konstruktiver Prozess verstanden. Im Gegensatz zu früheren Ansätzen wird der Wissenserwerb als aktive Tätigkeit verstanden. Um dabei Zusammenhänge besser erkennen zu können, sollte ganzheitliches Lernen auf unterschiedlichen Repräsentationsebenen (enaktiv, symbolisch, ikonisch) im Vordergrund stehen. Wichtig sind dabei ein stetiger Transfer von einer Darstellungsform in eine andere und das Versprachlichen der Tätigkeiten, da dadurch Wissenserwerb leichter ermöglicht werden kann. Ob tatsächlich Grundvorstellungen aufgebaut wurden, kann überprüft werden, indem das Kind dazu aufgefordert wird, dieselbe Aufgabe auf unterschiedlichen Repräsentationsebenen darzustellen und durchzuführen. Durch das Einfordern solcher Transferleistungen

¹⁵⁹ vgl. Kapitel 3.4.2.2

¹⁶⁰ vgl. GAIDOSCHIK 2007, S. 173

¹⁶¹ vgl. SCHIPPER 2009, S. 126

kann das rein prozedurale Abhandeln von Tätigkeiten und Operationen vermieden werden.

Um das Dezimalsystem zu verstehen, müssen in bereits vorhandene Konzepte der Zahlvorstellung neue Zahlkonzepte integriert werden. Anzahlen sollten als Zusammensetzung aus Einern und Zehnern verstanden werden, wobei auch Darstellungen aus Zehnern und mehr als zehn ungebündelten Einern erfasst werden können sollten. Diese Vorstellungen müssen außerdem mit der Ziffernschreibweise und der Zahlwortbildung der deutschen Sprache konzeptuell verbunden werden. Die möglichen Schwierigkeiten, die während dieses Lernprozesses auftreten könnten, sollten der Lehrperson bewusst sein, damit sie gezielt Probleme erkennen und entsprechend unterstützend eingreifen kann. In der deutschen Sprache sollte dabei auf die Unregelmäßigkeit der Zahlwortbildung besonderes Augenmerk gelegt werden. Ebenso müssen die Materialien von der Lehrperson bewusst für die Erarbeitung unterschiedlicher Teilaspekte des Stellenwertverständnisses ausgewählt und reflektiert eingesetzt werden. Dabei ist besonders wichtig, dass die mathematischen Strukturen der Erarbeitungsmaterialien von den Kindern erkannt und in dieselben hineingelesen werden.

4 Empirische Untersuchung

4.1 Einleitung

Im folgenden Kapitel werden die Grundlagen der empirischen Untersuchung beschrieben. Zunächst werden das Forschungsdesign und die Erhebungs- wie Auswertungsmethoden erläutert, sowie die Rahmenbedingungen der Durchführung der Untersuchung dargestellt. Anschließend werden die Leitfäden bzw. die Kernaufgaben der Interviews und die Kategorienschemata sowie Kodierungsgrundlagen zur Auswertung derselben vorgestellt.

4.2 Forschungsdesign

Zu Beginn der Untersuchung wurde ein halbstandardisiertes Interview mit der Lehrperson der gewählten Klasse durchgeführt. Charakteristisch für diese Form der Befragung ist ein Interviewleitfaden, der zwar Haupt- und Detaillierungsfragen beinhaltet, im Laufe des Interviews aber durch weitere Fragen erweitert werden kann¹⁶². Dabei wurden Unterrichtsmethoden und Erarbeitungsmaterialien erfragt, mit denen am Aufbau des Stellenwertverständnisses während der vergangenen drei Schuljahre gearbeitet wurde. Außerdem wurden die Kinder ausgewählt, die für die anschließende Untersuchung herangezogen wurden. Die Auswahl der je drei in Mathematik „leistungsstarken“ und „leistungsschwachen“ Schülerinnen und Schülern oblag dabei – nach dem Vorbild von GRAY¹⁶³ – allein der Lehrperson. Im Zuge des Interviews wurden die Kriterien erfragt, die die Lehrperson für die Zuweisung herangezogen hatte.

Die erhaltenen Daten in Form des Transkripts des Interviews wurden anschließend mittels inhaltlicher Strukturierung ausgewertet. Durch ein deduktiv entwickeltes Kategoriensystem, das induktiv modifiziert wurde, wurden Aussagen zu bestimmten Bereichen herausgefiltert und anschließend zusammengefasst.¹⁶⁴

Mit den ausgewählten Kindern wurden Einzelinterviews nach der „revidierten klinischen Methode“ durchgeführt. Ziel dieser Form des halbstandardisierten Interviews ist, mehr über das Denken, die Strategien und die Vorstellungen der

¹⁶² vgl. BORTZ & DÖRING 2006, S. 238 f., 314

¹⁶³ 1991

¹⁶⁴ vgl. MAYRING 2010, S. 98

Kinder zu erfahren. Dabei kann durch einen vorher bestimmten Fragen- bzw. Aufgabenkatalog das Kriterium der Vergleichbarkeit erfüllt werden. Durch die Möglichkeit, individuell auf das Kind und den Verlauf des Gesprächs einzugehen und den Fragenkatalog zu erweitern, kann aber auch der Unvorhersehbarkeit der Denkweisen Rechnung getragen werden. Zurückgehend auf Piaget wird zwischen dem klassischen „klinischen Interview“, bei dem nur ein Gespräch geführt wird, und der „revidierten klinischen Methode“ unterschieden, bei der das Kind auch dazu aufgefordert wird, mit Material zu handeln. Dadurch können vor allem Schülerinnen und Schüler mit sprachlichen Problemen ihre Denkprozesse besser darstellen und klarer ausdrücken. Da Aussagen der fragenden Person die Aktionen der Versuchspersonen beeinflussen können, muss im Zuge des Interviews vorsichtig und zurückhaltend vorgegangen werden. Ziel ist nicht, möglichst schnell zu einer richtigen Lösung zu kommen, sondern den Kindern Zeit zu geben, um ihre Gedankengänge verständlich darzustellen. Dabei spielt die Frage „Wie bist du darauf gekommen?“ eine zentrale Rolle.¹⁶⁵

Die aus den Interviews resultierenden Daten bestanden aus den Transkripten der videoaufgezeichneten Interviews und schriftlich festgehaltenen Lösungen. Diese wurden zunächst inhaltlich strukturiert, indem die durch Beobachtung und Befragungen erhobenen Denkweisen bezogen auf Aufgaben bzw. Aufgabengruppen einem deduktiv erstellten Kategorienschema zugewiesen wurden. Anschließend wurde eine skalierende Strukturierung durchgeführt. Ziel dieser Form der qualitativen Inhaltsanalyse ist, das vorhandene Datenmaterial einer meist ordinalen Skala zuzuordnen. Dabei wurden die bei den einzelnen Aufgaben bzw. Aufgabengruppen erhobenen Denkweisen auf einer deduktiv erstellten und induktiv modifizierten dreiteiligen Skala eingeschätzt.¹⁶⁶

Dabei ist zu beachten, dass der Einsatz von Kategoriensystemen zwar grundlegend zur Vergleichbarkeit der Ergebnisse beiträgt, synthetisches Verstehen der gesammelten Daten könnte aber durch diese analytisch-zergliedernde Auswertungsmethode behindert werden.¹⁶⁷ Deshalb wurden die erreichten Skalenniveaus im Zuge der Analyse unter anderem durch aussagekräftige Auszüge aus den Transkripten näher beschrieben.

¹⁶⁵ vgl. BENZ 2005, S. 105 ff.; SELTER & SPIEGEL 1997, S. 100 f.

¹⁶⁶ vgl. MAYRING 2010, S. 98 ff.

¹⁶⁷ vgl. MAYRING 2010, S. 49 f.

Die daraus resultierenden Beurteilungen des Verständnisses für das Dezimalsystem in den einzelnen Teilbereichen waren Grundlage für eine Gesamtbewertung des bereits aufgebauten Verständnisses jedes Kindes. Zur vergleichenden Analyse der nach dem Urteil der Lehrperson „leistungsstarken“ und „leistungsschwachen“ Kinder wurden die erreichten Skalenniveaus einander kategorienweise gegenübergestellt und analysiert.

4.3 Durchführung der Untersuchung

An der Untersuchung nahmen sechs Schülerinnen und Schüler der vierten Schulstufe der Praxisvolksschule Strebersdorf am Beginn der vierten Schulwoche des Schuljahres teil. Das vorab mit der Lehrperson durchgeführte Interview wurde akustisch aufgezeichnet. Anschließend wurden die von der Lehrperson ausgewählten Kinder während der Unterrichtszeit am Vormittag im Zuge von Einzelinterviews in einem Nebenraum befragt. Dabei verwendete Materialien setzen sich aus Arbeitsblättern, Steinen, Gläsern, Rechengeld aus Papier (Einermünzen, Zehner- und Hunderterscheine), einer Zehnerschachtel für Eier und Ziffernkärtchen zusammen. Die Aufgaben wurden teils rein verbal, teils unterstützt durch Ziffernkärtchen oder andere Materialien gestellt. Bei schriftlich gestellten Aufgaben wurde nur die erste näher erläutert. Die Befragungen wurden mittels Videokamera aufgezeichnet und anschließend transkribiert.

4.4 Interviewleitfäden und Auswahl der Aufgaben

4.4.1 Leitfaden zur Befragung der Lehrperson

Allgemeines

- Seit wie vielen Jahren sind Sie bereits klassenführender Lehrer Ihrer Klasse?
- Mit welchem Schulbuch arbeiteten Sie während der ersten drei Schuljahre?
 - Wie würden Sie dieses Schulbuch didaktisch beurteilen?
- Welche Bedeutung hat Ihrer Meinung nach Einsicht in das dezimale Stellenwertsystem für das mathematische Verständnis der Kinder?
 - In welcher Weise habe Sie dies während der vergangenen drei Jahre im Unterricht umgesetzt?

Erarbeitung und Arbeit am dezimalen Stellenwertsystem

- Welche Materialien haben Sie für die Erarbeitung und die Arbeit am dezimalen Stellenwertsystem während der vergangenen Jahre verwendet?
 - In welcher Art haben Sie ... im Unterricht für die Arbeit am Dezimalsystem eingesetzt?
 - Mehrsystemblöcke
 - Rechengeld
 - Stellenwerttabelle
 - Hundertertafel
 - Können Sie mir bitte ein konkretes Übungsbeispiel nennen, bei dem Sie ... eingesetzt haben?
 - Hatten Sie ... in Klassenstärke zur Verfügung, oder haben Sie es nur als Lehrperson für Demonstrationszwecke eingesetzt?
- Welche Grenzen haben sie sich beim Aufbau des Zahlenraums im Laufe der drei Jahre gesetzt?
- In welchem Zahlenraum rechnen die Schülerinnen und Schüler Ihrer Klasse momentan?

Auswahl der Kinder

- Ich benötige für meine Forschungsarbeit drei nach Ihrem Urteil in Mathematik „leistungsschwache“ und drei nach Ihrem Urteil in Mathematik „leistungsstarke“ Kinder, um diese vergleichend analysieren zu können. Bitte nennen Sie mir zunächst drei in Mathematik nach Ihrem Urteil „leistungsstarke“ Kinder.
 - Nach welchen Kriterien haben Sie ... als in Mathematik „leistungsstarkes“ Kind ausgewählt?
 - Welche Note hatte ... im Jahreszeugnis der dritten Klasse in Mathematik?
- Bitte nennen Sie mir nun drei in Mathematik nach Ihrem Urteil „leistungsschwache“ Kinder.
 - Nach welchen Kriterien haben Sie ... als in Mathematik „leistungsschwaches“ Kind ausgewählt?
 - Gibt es Bereiche der Mathematik, in denen ... leistungsstark ist?
 - Welche Note hatte ... im Jahreszeugnis der dritten Klasse in Mathematik?

4.4.2 Leitfaden und Kernaufgaben zur Befragung der Kinder

Um Kinder in ihrer Entwicklung mathematischen Verständnisses gezielt fördern zu können, ist es notwendig, den Lernstand und die individuellen Denkprozesse des Kindes so gut wie möglich zu verstehen. Dazu eignen sich diagnostische Aufgaben, die basierend auf Theorien darüber, wie mathematisches Verständnis aufgebaut wird, unterschiedliche Schwerpunkte hinterfragen und Verständnis sowie Verständnisdefizite im Umgang mit der Materie aufzeigen können. In dieser empirischen Untersuchung wurde ein Aufgabenkatalog angelehnt an Beispiele von GAIDOSCHIK¹⁶⁸, GERSTER und SCHULTZ¹⁶⁹ und RETZ¹⁷⁰ erstellt. Schwerpunkte, die untersucht wurden, waren basierend auf den theoretischen Darlegungen: Einsicht in das Bündelungsprinzip (Bündeln und Entbündeln) sowie die Anwendung derselben in Aufgaben, Einsicht in das Stellenwertprinzip und Kenntnisse über die Beziehung zwischen Ziffer und Zahlwort im Zahlenraum 1000. Im folgenden Abschnitt wird der Leitfaden zur Befragung der Kinder dargestellt. Er beinhaltet die Aufgabenstellungen, verwendete Materialien sowie mögliche Differenzierungen, falls Aufgaben oder Teile davon für einzelne Kinder zu schwierig waren. Ebenso werden der mit dem jeweiligen Beispiel erfragte Schwerpunkt sowie die Quelle angeführt.

Tabelle 3: Leitfaden und Kernaufgaben zur Befragung der Kinder

Nr.	Aufgabenstellung	Material, mögliche Differenzierung	Schwerpunkte, Quelle
Einleitung	Das Wichtigste heute ist: Immer, wenn ich dir eine Aufgabe stelle, werde ich dir anschließend nicht sagen, ob du sie richtig oder falsch gelöst hast. Das ist mir heute nicht wichtig. Ich werde dich stattdessen immer fragen, wie du das gemacht oder wie du das gerechnet hast. Ich möchte heute nämlich herausfinden, wie du denkst. Das ist mir heute wichtig.		
1	Ich sage dir 3 Zahlen an, die du bitte aufschreibst. 59, 362, 704	unbeschriebenes Papier, Stift	Zahlwort - Ziffernschreibweise GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 276 f.

¹⁶⁸ 2009

¹⁶⁹ 2004, S. 234 ff.

¹⁷⁰ 2003, S. 3

2	Kannst du mir diese Zahl bitte vorlesen? (<i>Ziffernkärtchen vorlegen</i>) Kannst du mir sagen, was die „4“ in der Zahl bedeutet? (<i>dabei auf die Ziffer am Ziffernkärtchen zeigen</i>)	Ziffernkärtchen „246“	Ziffernschreibweise – Zahlwort, Stellenwertprinzip <i>GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 277 f.</i>
3	Das ist eine Preisliste von Fahrrädern. Kannst du mir sagen, welches das teuerste Fahrrad ist? (<i>Begründung erfragen</i>)	Preisliste mit den Zahlen 365, 536, 653, 563, 635 und 356 <i>Diff: Hälfte der Preisliste abdecken</i>	In Ziffern geschriebene Zahlen der Größe nach ordnen <i>RETZ 2003, S. 50</i>
4	Lies mir die beiden Zahlen bitte vor. Welche Zahl ist größer?	Ziffernkärtchen „299“ und „305“ „25“ und „52“	Ziffernschreibweise – Zahlwort, Stellenwertprinzip <i>RETZ 2003, S. 38</i>
5	Kennst du diese Symbole? Weißt du, was sie hier bedeuten? (<i>dabei auf die erste Angabe zeigen</i>) Schreib bitte die Zahl, die diese Angabe bedeutet, daneben und lies mir deine Lösung auch laut vor. (<i>unterstützend am Arbeitsblatt zeigen</i>)	Arbeitsblatt, Stift, Rechengeld 3H 4Z 5E = _____ 3Z 2E 7H = _____ 6H 2Z = _____ 3E 5H = _____ 4Z 12E = _____ 2H 13Z 4E = _____ <i>Diff.: Aufgabe mit Hilfe von Rechengeld legen und lösen</i>	Stellenwertprinzip, Bündelungsprinzip Ziffer-Zahlwort <i>RETZ 2003, S. 51</i>
6.1	Die nächste Aufgabe machen wir gemeinsam. Wir füllen in jedes Glas 10 Steine ein. Wie viele Steine sind das? (<i>auf die gefüllten Gläser zeigen</i>) Wie hast du sie gezählt?	140 Steine, 8 Gläser	Bündeln <i>GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 281 f.</i> <i>RETZ 2003, S. 26 f.</i>

6.2	(Gläser und restliche Steine in das Blickfeld rücken) Gib mir bitte 25 Steine.	140 Steine, 8 Gläser <i>Diff., wenn Bündelung nicht genützt:</i> Kannst du es so legen, dass ich auf einen Blick erkennen kann, wie viele es sind? (daneben 25 aus Gläsern und Steinen legen) Ein anderes Kind hat mir 25 einmal so gelegt. Kannst du mir erklären, was sich das Kind dabei gedacht hat? Welche Darstellung gefällt dir besser?	Bündeln GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 281 f. RETZ 2003, S. 26 f.
6.3	(5 Gläser und 3 Steine legen) Wie viele Steine sind das? Leg daneben bitte 35 Steine. (Ziffernkärtchen in die Mitte legen) Kannst du bitte das passende Kärtchen zu den Mengen legen? (auf die jeweilige Ziffer zeigen) Was hat die 3 mit dieser Menge hier zu tun? Und was hat die 3 mit deiner Menge zu tun?	140 Steine, 8 Gläser Ziffernkärtchen „35“ und „53“ <i>Diff., wenn Bündelung für 35 Steine nicht genützt:</i> Kannst du die Menge so anordnen, dass man die 3 erkennen kann?	Bündeln, Stellenwertprinzip RETZ 2003, S. 26 f. GAIDOSCHIK 2009
7	(Zehnerkarton für Eier auf den Tisch legen) Eier kann man in Zehnerkartons kaufen. In einen solchen Karton passen immer genau zehn Eier. Ein Bauer hat in seinem Hühnerstall 43 Eier gefunden. Wie viele Zehnerkartons kann er damit vollmachen? In einem großen Hühnerbetrieb wurden 123 Eier gefunden. Wie viele Zehnerkartons können damit vollgemacht werden? (passendes Ziffernkärtchen im Zuge der Aufgabenstellung auf den Tisch legen)	Zehnerkarton für Eier, Ziffernkärtchen „43“ und „123“	Bündeln GAIDOSCHIK 2009 GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 280 f.

8	Hans hat bereits 47 Euro gespart. Er möchte sich einen Elektrobaukasten kaufen, der 87 Euro kostet. Wie viel Geld fehlt ihm noch? Der Herr Lehrer möchte sich ein I-Pad kaufen, das 579 Euro kostet. Er hat bereits 279 Euro gespart. Wie viel Geld fehlt ihm noch (passendes Ziffernkärtchen im Zuge der Aufgabenstellung auf den Tisch legen)	Ziffernkärtchen „47“ und „87“ „579“ und „279“ <i>Diff., wenn zu schwierig: 47 Euro gespart; Baukasten um 57 Euro im Angebot</i>	Bündeln <i>GAIDOSCHIK 2009 GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 285 f.</i>
9	Kannst du bitte von 357 in Zehnerschritten rückwärtszählen?	Stift, Papier, unbeschrifteter Zahlenstrahl mit freien Feldern in regelmäßigen Abständen <i>Bei keinen Problemen außer Zahlauslassungen: von 243</i> <i>Diff., wenn zu schwierig:</i> • von 350 rückwärtszählen • Startzahl aufschreiben, verbal weiterzählen • Schriftlich auf dem Zahlenstrahl zählen	sprachliche Regelkompetenz, Entbündeln <i>GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 274 RETZ 2003, S. 52</i>
10	Oma Herta hat 2 Enkelkinder und möchte ihnen zu Weihnachten genau gleich viel Geld schenken. Sie hat aber nur einen 100-Euro-Schein und vier 10-Euro-Scheine zu Hause. Was könnte sie machen?“ „Wie viel Geld bekommt jedes Enkelkind?“	Rechengeld <i>Diff., wenn zu schwierig:</i> • auf Möglichkeit des Wechselns aufmerksam machen • mit Rechengeld legen	Entbündeln <i>GAIDOSCHIK 2009</i>
11	Was ist die Hälfte von ... 4 / 40 / 90 200 / 600 / 500 / 700	Rechengeld <i>Diff., wenn bei 90 nicht möglich: mit Rechengeld legen</i>	Entbündeln <i>GAIDOSCHIK 2009</i>

4.5 Kategorienschema zur Kodierung des Datenmaterials

Für die Auswertung der Interviews wurden deduktiv Kategorienschemata entwickelt, die im Zuge der Auswertung induktiv modifiziert und überarbeitet wurden.¹⁷¹

4.5.1 Kategorienschema zur Auswertung der Befragung der Lehrperson

Zur Auswertung des Interviews mit der Lehrperson wurden folgende Kategorien herangezogen:

1. Allgemeine Informationen zur Klassensituation
2. Stellenwert der Arbeit am Verständnis des Dezimalsystems im Unterricht
3. Unterrichtsmethoden und Einsatz von Erarbeitungsmitteln
 - a) Allgemeine Informationen
 - b) Grenzen der Zahlenraumerweiterung
4. Erarbeitungsmittel im Bereich des Stellenwertverständnisses
 - a) Dienes-Material
 - b) Rechengeld
 - c) Hundertertafel
 - d) Stellenwerttabelle
5. Informationen über die Kinder
 - a) Kind A
 - b) Kind B
 - c) Kind C
 - d) Kind D
 - e) Kind E
 - f) Kind F

4.5.2 Kategorienschema zur Auswertung der Befragung der Kinder

Im Zuge der Auswertung der Interviews mit den Schülerinnen und Schülern wurden deren Lösungen und Lösungsansätze bei einzelnen Aufgaben zunächst folgenden

¹⁷¹ vgl. MAYRING 2010, S. 92 ff.

Kategorien zugeordnet und gegebenenfalls zu Aufgabengruppen, durch die Ähnliches überprüft wurde, zusammengefasst:

- K1 Einsicht in das Bündelungsprinzip
 - a. Schwerpunkt Bündeln
 - b. Schwerpunkt Entbündeln
- K2 Einsicht in das Stellenwertprinzip
- K3 Beziehung Ziffernfolge – Zahlwort
 - a. Ziffernfolgen gesprochene Zahlwörter zuordnen
 - b. gesprochene Zahlwörter in Ziffernfolgen übersetzen

In Kategorie 3 flossen nicht nur die Lösungen und Lösungsansätze der Aufgaben hinein, die gezielt dieses Wissen abprüften, vielmehr wurde während des gesamten Interviews beobachtet, ob Schwierigkeiten bei der Beziehung zwischen Ziffernfolge und Zahlwort auftraten. Diese Beobachtungen wurden ebenfalls Kategorie 3 zugeordnet.

Anschließend wurden die Lösungsansätze nach aufgaben- bzw. kategoriespezifischen Kodierungsschemata auf einer dreiteiligen Skala ausgewertet, wobei das erste Skalenniveau in zwei Unterniveaus geteilt wurde. Allgemein formuliert können die Skalenniveaus wie folgt charakterisiert werden:

- S1a Kind hat die Aufgabe eigenständig und ohne Rückgriff auf Material sowie ohne Schwierigkeiten gelöst und fundiert begründet, wenn dies gefragt war.
- S1b Kind hat die Aufgabe unter Rückgriff auf Material eigenständig und ohne Schwierigkeiten gelöst, sowie fundiert begründet, wenn dies gefragt war.
- S2 Kind hat die Aufgabe trotz Unterstützung mit Unsicherheiten gelöst und/oder nur vage begründet, wenn dies gefragt war.
- S3 Kind hatte trotz Unterstützung große Schwierigkeiten beim Lösen der Aufgabe und/oder konnte nicht begründen, wenn dies gefragt war.

Die Unterniveaus der Kategorie S1 wurden in ihrem Rang nahezu gleichwertig angesehen, weil besonderer Wert auf selbstständiges Lösen und eine fundierte Begründung gelegt wurde. Da von einem gesicherten Stellenwertverständnis aber erst ausgegangen werden kann, wenn die unterschiedlichen Vorstellungen von Zahlen ohne Material abstrakt beim Rechnen genutzt werden können, wurde dennoch zwischen S1a (ohne Material) und S1b (mit Material) differenziert. War bei einer Aufgabe keine Lösung mit Material vorgesehen, wurde mit S1 kodiert. Konnte

eines dieser Niveaus erreicht werden, wurde dies als deutlicher Hinweis auf ein tragfähiges Verständnis gewertet. Wurde ein Lösungsansatz mit S2 bewertet, wurde dieser als Hinweis auf eine nicht gänzlich gefestigte Einsicht in das Dezimalsystem interpretiert. Konnte kein bzw. nur sehr geringes Stellenwertverständnis beim Lösen der Aufgabe erkannt werden, entsprach dies dem Skalenniveau S3.

Aus den Kodierungen der einzelnen Aufgaben bzw. Aufgabengruppen, resultierte eine Gesamtbewertung des Kindes für die jeweilige Kategorie. Diese zusammenfassenden Beurteilungen der einzelnen Kategorien wurden anschließend zur Bewertung des Verständnisses des Dezimalsystems sowie zur vergleichenden Interpretation der „leistungsstarken“ und „leistungsschwachen“ Schülerinnen und Schüler herangezogen.

Um das vorhandene Datenmaterial auswerten zu können, wurden die Skalenniveaus für die oben genannten Kategorien bzw., wenn notwendig, für einzelne Aufgaben oder Aufgabengruppen spezifiziert, sowie Beispiele für Begründungen und mögliche Unterstützungen gegeben. Diese Spezifikationen werden im Folgenden beschrieben. Bei vereinzelter Aufgaben konnte im Zuge der induktiven Modifizierung keine eindeutige und begründete Differenzierung zwischen den Skalenniveaus getroffen werden. Begründungen dafür sowie die Vorgangsweise der Auswertung in diesem Fall werden ebenfalls dargestellt.

4.5.2.1 Kategorie 1a: Einsicht in das Bündelungsprinzip – Schwerpunkt Bündeln

In dieser Kategorie konnte keine einheitliche Definition der Skalenniveaus gefunden werden, da unterschiedliche Aspekte untersucht wurden. Deshalb werden im Folgenden die Skalenniveaus einzelner Aufgaben bzw. Aufgabengruppen definiert, die zur Kodierung herangezogen wurden.

Aufgabe 5 – Teilaufgaben 5 und 6 (4Z 12E = ; 2H 13Z 4E =)

Mit S1a wurde bei diesem Beispiel kodiert, wenn das Kind die Aufgabe rein auf der symbolischen Ebene ohne Schwierigkeiten lösen konnte. Als fundiert begründet wurde angesehen, wenn das Bündeln zehn kleinerer Einheiten zur nächst größeren zur Erläuterung herangezogen wurde. Mit S1b wurde kodiert, wenn die Aufgabe nach anfänglichem Scheitern auf symbolischer Ebene anschließend mit Rechengeld selbstständig gelöst und ebenso fundiert begründet wurde. Skalenniveau S2 wurde vergeben, wenn Hilfestellungen notwendig waren, beispielsweise das Hinweisen auf die Möglichkeit des Wechsels bei Verwendung von Rechengeld. Kinder, die bei dieser Aufgabe Skalenniveau S3 erreichten, scheiterten an der stellengerechten Darstellung mit Material oder konnten keine Verbindung zwischen ungebündelten und gebündelten Zahldarstellungen herstellen. So war es zum Beispiel nicht möglich

zu erklären, in welchem Bezug eine Darstellung aus vier Zehnerscheinen und zwölf Einermünzen zu jener aus fünf Zehnerscheinen und zwei Einermünzen steht.

Aufgabe 6.1 und 6.3 – Anzahlermittlung bei Mengendarstellungen, die aus Zehnern und Einern bestehen

Hier wurde unterschieden, ob die Bündelungen mit dem richtigen Ergebnis in Einerschritten (S1; zum Beispiel „1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 80“) oder in Zehnerschritten (S2; zum Beispiel „10, 20, 30, 40, 50“) gezählt wurden. In beiden Fällen wurden Einer und Zehner der Darstellung aber richtig verknüpft. Hat ein Kind eines der beiden Skalenniveaus erreicht, musste bei der Interpretation aber vorsichtig vorgegangen werden, da beide Zählweisen auch ohne Einsicht in das Stellenwertsystem korrekt durchgeführt werden können. Mit S3 wurde kodiert, wenn die Anzahl nicht oder nur durch Zählen einzelner Steine ermittelt werden konnte, ohne die Zehnerbündelung dafür zu nützen. Auch wenn Fehler beim Verknüpfen der Einheiten entstanden (zum Beispiel Fortsetzen von Zählen in Zehnerschritten, obwohl Einer gezählt wurden), wurde nur dieses Skalenniveau erreicht. In diese Kategorie flossen auch Beobachtungen, die beim Umgang mit Rechengeld im Zuge des LöSENS anderer Aufgaben gemacht wurden.

Aufgabe 6.2 und 6.3 – Darstellen von 25 und 35 Steinen

Bei dieser Aufgabe lag der Fokus auf der Verwendung vorab gebündelter Steine. Hat das Kind sofort zur Bündelung gegriffen, wurde mit S1 kodiert. Ebenso entsprach es diesem Skalenniveau, wenn die Gläser (Zehnerbündel) zum Legen von 25 Steinen ausgeleert oder nicht verwendet wurden, die Darstellung aus zwei Zehnerbündeln und fünf einzelnen Steinen aber richtig interpretiert werden konnte. Außerdem war ausschlaggebend, dass das Kind im Zuge der nächsten Aufgabe die Zehnerbündel für die Zahldarstellung verwendete, nachdem diese zuvor von der Interviewerin genützt wurden. Griff das Kind für weitere Zahldarstellungen dennoch nicht oder nur teilweise zu den Zehnerbündeln, wurde mit S2 kodiert, wenn zur Darstellung der Zehner aus einzelnen Steinen ohne Schwierigkeiten Zehnerbündelungen hergestellt werden konnten. Skalenniveau S3 wurde vergeben, wenn ein Kind die Bündelungen durchgehend nicht verwendete und Schwierigkeiten beim Herstellen von Gruppen zur Darstellung der Zehner auftraten.

Aufgabe 7 – Zehnerkartons vollfüllen

Bei dieser Aufgabe wurde überprüft, ob Anzahlen gedanklich in Zehner gebündelt werden konnten. Wurde die Aufgabe ohne Schwierigkeiten richtig gelöst, wurde mit S1 kodiert. Außerdem wurde Wert auf eine Begründung mit Hilfe des Stellenwertsystems gelegt. Skalenniveau S2 wurde erreicht, wenn die Lösung nur

durch Zählen in Zehnerschritten gefunden werden konnte. War keine Lösung möglich, wurde mit S3 kodiert.

Aufgabe 8 – Zehner- und Hunderterdifferenzen ausrechnen

Bei dieser Aufgabe wurde Skalenniveau S1 vergeben, wenn die Frage spontan und nicht zählend beantwortet, sowie eine Begründung des Rechenweges mit Verweis auf das Stellenwertsystem gegeben werden konnte. Mit S2 wurde kodiert, wenn die Differenz nur durch Zählen in Zehnerschritten ermittelt werden konnte. Scheiterte das Kind am Lösen der Aufgabe, wurde Skalenniveau S3 erreicht.

Bei den Aufgaben 7 und 8 kann durch Erreichen des Skalenniveaus S1 noch nicht unmittelbar von einem gesicherten Stellenwertverständnis ausgegangen werden, da eine Lösung sowohl aufbauend auf prozeduralem als auch auf konzeptuellem Wissen möglich war. Ob die Begründung eines Kindes Rückschlüsse auf sein konzeptuelles Wissen zuließ, wurde im Zuge der Auswertungen der einzelnen Gespräche individuell beurteilt und analysiert.

4.5.2.2 Kategorie 1b: Einsicht in das Bündelungsprinzip – Schwerpunkt Entbündeln

In dieser Kategorie werden die Skalenniveaus ebenfalls für einzelne Aufgaben spezifiziert, da unterschiedliche Hilfestellungen möglich waren.

Aufgabe 9 – von 357 in Zehnerschritten rückwärtszählen

SCHERER und MOSER OPITZ¹⁷² führen das Rückwärtszählen in Zehnerschritten mit Hunderterunterschreitung als Möglichkeit an, um herauszufinden, ob Kinder Einsicht in das Entbündeln gewonnen haben. Die Begründung dafür liegt im Zerlegen eines Hunderters in zehn Zehner, das notwendig ist, um von einer reinen Hunderterzahl einen Zehnerschritt rückwärtszählen zu können. Passiert dies im Zuge schriftgestützten Zählens auf symbolischer Ebene (beispielsweise durch Eintragen der Ziffernfolge auf einem Zahlenstrahl), gäbe es unterschiedliche Ansätze, diese Aufgabe zu lösen. Es könnte über die Stellenwerte nachgedacht werden, wobei das Kind dabei das Prinzip des Entbündelns bereits verstanden haben müsste. Es wäre aber auch eine eher prozedurale Orientierung an Zahlenmustern möglich.

Nach GERSTER und SCHULTZ¹⁷³ wird bei dieser Aufgabe aber nicht nur Einsicht in das Bündelungsprinzip abgefragt, sondern es werden auch bereits aufgebaute sprachliche Konzepte überprüft. Die sprachliche Regelkompetenz entspricht prozeduralem Wissen, wobei für das Zählen in Zehnerschritten außerdem zwischen

¹⁷² 2010, S. 136 f.

¹⁷³ 2004, S. 273

Einer- und Zehnerschritten differenziert werden muss. Ist dies möglich, könne aber nicht davon ausgegangen werden, dass ein Zehnerschritt als Dazugeben oder Wegnehmen von zehn Einzelnen verstanden wird.

Im Zuge der induktiven Modifizierung der Skalenniveaus wurden die oben genannten Schwierigkeiten deutlich, Lösungsvarianten bei dieser Aufgabe in Bezug auf das zugrundeliegende Stellenwertverständnis richtig einzuschätzen. Durchwegs alle Kinder zeigten Unsicherheiten, wenn von keiner reinen Zehnerzahl in Zehnerschritten rückwärtsgezählt werden sollte. Dabei konnte aber nicht immer klar unterschieden werden, ob die Schwierigkeiten durch mangelnde Einsicht in das Bündelungsprinzip, durch fehlende sprachliche Konzepte oder schlicht durch fehlende Vertrautheit mit solchen Aufgaben entstanden. Da abgesehen davon von der Interviewerin auch durch unterschiedliche Differenzierungen der Aufgabenstellung auf diese Unsicherheiten eingegangen wurde, wurden die Lösungsansätze ohne Skalierung für jedes Kind individuell analysiert und in Kapitel 5.3 dargestellt.

Aufgabe 10 – Geld verteilen

Bei dieser Aufgabe wurde mit S1a kodiert, wenn das Kind sofort auf die Idee kam, den Geldschein zu wechseln. Konnte nur mit Hilfe von Rechengeld, dann aber selbstständig eine Lösung gefunden werden, wurde Skalenniveau S1b vergeben. War gezieltes Hinweisen auf die Möglichkeit des Wechselns eines Hunderterscheines notwendig, um die Aufgabe lösen zu können, wurde mit S2 kodiert. War dennoch keine Lösung des Problems möglich, entsprach dies Skalenniveau S3.

Aufgabe 11 – Hälfte von 90 und 500

Bei dieser Aufgabe wurde mit S1a kodiert, wenn das Kind selbstständig ohne jeden weiteren Hinweis der Interviewerin eine Lösung finden konnte. Wurde vom Kind zunächst angemerkt, dass 90 nicht halbiert werden könne, konnte das Kind dann aber mit Rechengeld selbstständig eine Lösung finden, so wurde Skalenniveau S1b vergeben. Dabei wurde großer Wert auf eine fundierte Begründung mit Hilfe des Bündelungsprinzips gelegt. Mit S2 wurde kodiert, wenn beim Lösen der Aufgabe mit Hilfe von Material Unsicherheiten auftraten bzw. erst durch gezieltes Nachfragen die Möglichkeit des Entbündelns erkannt wurde. Konnte trotz Hilfestellung keine Lösung gefunden werden, wurde Skalenniveau S3 erreicht.

4.5.2.3 Kategorie 2: Einsicht in das Stellenwertprinzip

In dieser Kategorie werden aufgrund unterschiedlicher Schwerpunkte und Möglichkeiten der Hilfestellung ebenfalls Skalenniveaus einzelner Aufgaben bzw. Aufgabengruppen definiert.

Aufgabe 2 – Bedeutung der Ziffer 4 in 246

Wurde sowohl „4 Zehner“ als auch „40“ erwähnt, so wurde mit S1 kodiert. Konnte nur die Zehnerstelle benannt, der Wert aber nicht oder nur mit Schwierigkeiten definiert werden, entsprach dies dem Skalenniveau S2. Konnte keine Erklärung dafür abgegeben werden, was die Ziffer 4 bedeutet, wurde mit S3 kodiert.

Aufgabe 3 und 4 – Finden der größeren Zahl

Konnte bei beiden Aufgaben die größere bzw. größte Zahl rasch und durch das Stellenwertprinzip begründet gefunden werden, wurde Skalenniveau S1 erreicht. Zeigten sich Schwierigkeiten durch das Beurteilen zifferngleicher Zahlen, oder wenn Neunen an Zehner und Einerstelle bei niedrigerer Hunderteranzahl standen, wurde mit S2 kodiert, wenn die größere Zahl dennoch ohne weitere Hilfestellung gefunden werden konnte. Zeigten sich große Schwierigkeiten oder konnte die größere Zahl nicht gefunden werden, entsprach dies Skalenniveau S3. Ob das Kind vermehrt prozedural oder aufbauend auf Konzepte vorging, wurde im Zuge der Analyse dargestellt.

Aufgabe 5 – Übersetzen von Zahlen, die durch Ziffern und den Stellenwerten zugeordnete Buchstaben gekennzeichnet sind, in Ziffernfolgen

Bei dieser Aufgabe wurde mit S1 kodiert, wenn die Beispiele, bei denen keine weitere Bündelung notwendig war (siehe Kategorie 1a), selbstständig gelöst und die Rolle der Ziffer 0 sicher erklärt werden konnte. Wurde ein Fehler bei der zweiten Aufgabe ($3Z\ 2E\ 7H = \underline{\quad}$) im Zuge der Begründung der Lösung eigenständig erkannt und traten danach keine weiteren Schwierigkeiten mehr auf, ließ dies das erreichte Niveau nicht sinken. Wurden ein Fehler nicht oder nur durch gezieltes Nachfragen erkannt, oder traten danach noch vereinzelt weitere Schwierigkeiten auf, entsprach dies Skalenniveau S2. Mit S3 wurde kodiert, wenn die Aufgaben größtenteils falsch gelöst wurden bzw. die Rolle der Null nicht erklärt werden konnte.

Aufgabe 6.3 – Ziffern einer notierten Zahl den entsprechenden Teilmengen einer Zahldarstellung zuordnen

Skalenniveau S1 wurde erreicht, wenn ohne Schwierigkeiten den Stellenwerten die entsprechenden Teilmengen zugeordnet und durch die Anzahl der Zehner bzw. Einer begründet werden konnte. Skalenniveau S2 entsprach es, wenn nur durch gezieltes Nachfragen und mit Unsicherheiten eine Verbindung zwischen Ziffernfolge und gebündelter Zahldarstellung hergestellt werden konnte. Mit S3 wurde kodiert, wenn zwischen der Zahldarstellung und der Ziffernfolge kein Bezug hergestellt werden konnte.

4.5.2.4 Kategorie 3: Beziehung Ziffernfolge – Zahlwort

In dieser Kategorie wurden alle Beobachtungen, die während des gesamten Gesprächsverlaufs gemacht wurden, für die beiden Unterkategorien („Ziffernfolgen gesprochene Zahlwörter zuordnen“ bzw. „gesprochene Zahlwörter in Ziffernfolgen übersetzen“) nur einmal beurteilt.

Kategorie 3a: Ziffernfolgen gesprochene Zahlwörter zuordnen

Mit S1 wurde kodiert, wenn keine Schwierigkeiten beim Übersetzen von Ziffernfolgen in Zahlwörter erkennbar waren. Traten mehrfach geringe Unsicherheiten auf (zum Beispiel zum falschen Zahlwort ansetzen, aber dann doch richtig aussprechen), entsprach dies Skalenniveau S2. Konnten vermehrt große Probleme bemerkt werden oder konnten Ziffernfolgen die korrekten Zahlwörter nicht zugeordnet werden, so wurde mit S3 kodiert.

Kategorie 3b: gesprochene Zahlwörter in Ziffernfolgen übersetzen

Waren keine Schwierigkeiten beim Übersetzen gesprochener Zahlwörter in Ziffernfolgen erkennbar, wurde mit S1 kodiert. Skalenniveau S2 wurde erreicht, wenn mehrfach geringe Unsicherheiten (zum Beispiel zögern während des Schreibens) auftraten. War es nicht möglich, gesprochene Zahlwörter in die korrekten Ziffernfolgen zu übersetzen oder traten vermehrt große Probleme auf, wurde mit S3 kodiert.

Abgesehen davon wurde dem Skalenniveau jeweils ein „i“ beigefügt, wenn die Ziffernfolgen invers aufgeschrieben wurden. Ob dadurch Unsicherheiten bzw. Schwierigkeiten entstanden, kann durch das jeweils erreichte Skalenniveau herausgelesen werden.

4.6 Resümee

Im Zuge der hier vorgestellten Studie wurden zwei unterschiedliche Formen des halbstandardisierten Interviews durchgeführt. Zunächst wurde die Lehrperson in einem Leitfadeninterview nach Unterrichtsmethoden und Erarbeitungsmaterialien, die zum Aufbau des Stellenwertverständnisses im Unterricht Verwendung fanden, befragt. Außerdem wurde die Wahl der zur Studie herangezogenen je drei in Mathematik „leistungsstarken“ und „leistungsschwachen“ Schülerinnen und Schüler von der Lehrperson getroffen. Dieses Interview wurde mittels eines deduktiv erstellen und induktiv modifizierten Kategorienschemas nach der inhaltlichen Strukturierung analysiert und ausgewertet.

Anschließend wurden mit den gewählten Kindern der vierten Schulstufe halbstandardisierte Einzelinterviews nach der „revidierten klinischen Methode“ am Beginn des Schuljahres durchgeführt. Kernaufgaben, zu deren Lösungen teilweise auch Materialien verwendet wurden, wurden durch individuelle Fragen ergänzt, um den Denkprozess der Schülerinnen und Schüler bestmöglich erfassen zu können. Die gewonnenen Daten wurden zunächst mittels inhaltlicher Strukturierung deduktiv erstellten Kategorien zugeordnet. Dabei wurden unterschiedliche Aspekte des Stellenwertverständnisses jeweils für sich betrachtet. Anschließend wurden Lösungen und Lösungsansätze der Kinder bei einzelnen Aufgaben oder zusammengefassten Aufgabengruppen mittels skalierender Strukturierung auf einer Ordinalskala ausgewertet. Die Skalenniveaus wurden dabei zunächst deduktiv erstellt, anschließend induktiv modifiziert und für die einzelnen Bereiche genau definiert, um eine möglichst objektive Kodierung zu ermöglichen. Bei einzelnen Aufgaben ergab diese Modifizierung, dass in Bezug auf das zur Lösung angewendete Stellenwertverständnis keine genaue Einteilung in klar definierte Niveaus möglich war. Diese Lösungen und Lösungsansätze wurden deshalb theoriegeleitet individuell analysiert und ausgewertet. Um durch die Kodierung mittels Skalenniveaus das synthetische Erfassen des untersuchten Gegenstandes nicht einzuschränken, wurden die Gesprächsteile im Zuge der Auswertung ausführlich dargestellt, die für die jeweilige Kodierung ausschlaggebend waren.

Abschließend wurde auf Basis der erhaltenen Skalierungen das Verständnis der einzelnen Teilbereiche des Stellenwertsystems analysiert, um in weiterer Folge eine zusammenfassende Aussage über die Einsicht in das Dezimalsystem tätigen zu können, die jedes Kind bereits gewonnen hat. Zur vergleichenden Analyse der „leistungsstarken“ und „leistungsschwachen“ Kinder wurden die Leistungen in den einzelnen Teilbereichen analysiert und in Beziehung zueinander gesetzt.

5 Ergebnisse und Diskussion

5.1 Einleitung

Im folgenden Kapitel werden die Ergebnisse der Forschung vorgestellt. Zunächst wird das Interview mit der Lehrperson nach unterschiedlichen Aspekten analysiert. Anschließend werden die Ergebnisse der Auswertung der Einzelinterviews für jedes Kind dargestellt. Dabei werden die Teilbereiche „Bündelungsprinzip – Schwerpunkt Bündeln“, „Bündelungsprinzip – Schwerpunkt Entbündeln“, „Stellenwertprinzip“ und „Beziehung Ziffernfolge und Zahlwort“ getrennt analysiert und anschließend zusammengefasst. Im folgenden Kapitel werden die Ergebnisse der in Mathematik „leistungsstarken“ und „leistungsschwachen“ in denselben Teilbereichen vergleichend ausgewertet. Abschließend werden ausgewählte Kritikpunkte an der empirischen Untersuchung dargestellt.

5.2 Interpretation des Interviews mit der Lehrperson

Zur allgemeinen Klassensituation ist zu sagen, dass die Kinder bereits seit der ersten Klasse von der Lehrperson, die im dreizehnten Dienstjahr arbeitet, unterrichtet werden. Die Arbeit am Verständnis des Dezimalsystems im Unterricht hat für die Lehrperson nach eigener Aussage große Bedeutung. Stellenwertverständnis sei ein „ganz ganz essenzielles ... Tool, um Mathematik zu verstehen“¹⁷⁴.

5.2.1 Unterrichtsmethoden und Einsatz von Erarbeitungsmittel

In Einklang mit der in Kapitel 3.3.2 dargestellten Relevanz der Arbeit auf der enaktiven Ebene, stellt die Lehrperson das „Begreifen“ und Handeln mit konkreten Materialien besonders am Beginn der Erarbeitung in den Vordergrund. Daraus sollte dann der „Übertrag in .. symbolische .. Elemente“¹⁷⁵ geschaffen werden. Aber auch nach der Erarbeitung seien konkrete Materialien besonders bei Schwierigkeiten immer wieder für Übungen verwendet worden. Dabei sei differenziert auf das Leistungsniveau der Kinder eingegangen worden, da sie unterschiedlich lang mit Material gearbeitet haben. Wichtig sei in den Augen der Lehrperson, dass zumindest ausgewählte Materialien in Klassenstärke vorhanden seien.

¹⁷⁴ Transkript Lehrperson, Z 17

¹⁷⁵ Transkript Lehrperson, Z 20

Ebenso sollte der Erfahrungsraum der Kinder bei der Wahl der Materialien berücksichtigt werden. Deshalb seien Zehnererelemente aus der Lebenswelt der Kinder (wie zum Beispiel zehn Eier in einer Schachtel) gewählt worden, um am Aufbau von Stellenwertverständnis zu arbeiten. Dies zeigt deutlich, dass versucht wurde, eine Verbindung zwischen informellen und formellen Wissen der Kinder herzustellen.¹⁷⁶

In Bezug auf die Zahlenraumerweiterung wurden im Gegensatz zu der in Kapitel 3.5.1 dargestellten Meinung der Fachdidaktik im Zahlenraum 100 Grenzen bei 5, 7, 10, 30 und 50 gesetzt, bevor im gesamten Hunderterraum gearbeitet wurde. Von Hundert wurde der Zahlenraum hingegen in Einklang mit der Fachdidaktik ganzheitlich auf den Zahlenraum 1000 erweitert.

5.2.2 Erarbeitungsmittel im Bereich des Stellenwertverständnisses

5.2.2.1 Dienes-Material

Zehnerstangen und Einerwürfel sind in Klassenstärke vorhanden gewesen und wurden nach Aussagen der Lehrperson ab der zweiten Klasse „wirklich exzessiv eingesetzt“¹⁷⁷. Hunderterplatten haben allerdings nur noch ikonisch auf der interaktiven Tafel zur Veranschaulichung gedient. Das Material habe besonders bei additiven Rechenoperationen mit und ohne Zehnerübergang Verwendung gefunden. Im Vordergrund sei das Zerlegen von Zahlen in ihre Stellenwerte sowie das Umtauschen von zehn Einern in einen Zehner und umgekehrt gestanden, wenn dies durch die gestellte Aufgabe notwendig war. Dadurch wurde ein in Kapitel 3.4.3.3 ausgearbeiteter Vorteil dieses Materials effektiv genutzt. Durch die fixierten Einheiten können die Anforderungen, die das Dezimalsystem bei Über- oder Unterschreitungen stellt, veranschaulicht werden.¹⁷⁸

5.2.2.2 Rechengeld

Rechengeld sei ähnlich wie das Dienes-Material im zweiten Schuljahr in Klassenstärke eingesetzt worden. Wesentlich sei dabei aber der Umgang mit Scheinen und Münzen im Zuge konkreter Situationen wie zum Beispiel einem

¹⁷⁶ vgl. GERSTER und SCHULTZ 2004, S. 33 f.

¹⁷⁷ Transkript Lehrperson, Z 54

¹⁷⁸ vgl. GAIDOSCHIK 2003a, S. 140; GAIDOSCHIK 2007, S. 168 f.

Einkauf am Markt gewesen, wodurch der Bezug zum informellen Wissen der Kinder hergestellt werden konnte.¹⁷⁹

5.2.2.3 Hundertertafel

In Bezug auf die Hundertertafel betonte die Lehrperson, dass die Zahlen von unten nach oben aufsteigend notiert gewesen waren. Verwendet worden sei dieses Erarbeitungsmittel im Zuge unterschiedlicher Suchaufgaben (zum Beispiel Zehner- und Einernachbarzahlen) zur Festigung der „Orientierung im Zahlenraum“¹⁸⁰. Aufbauend auf dieser Vorstellung habe die Hundertertafel auch im Zuge überschlagenden Rechnens bei der Überprüfung des Ergebnisses geholfen, wodurch unter anderem Zahlendrehern vorgebeugt werden sollte. Dazu hätten sich die Kinder in Bezug auf die Hundertertafel vorstellen sollen, an welcher Stelle die Lösung einer Rechnung ungefähr sein müsse.

In diesem Punkt wurde die Hundertertafel im Widerspruch zu dargestellten fachdidaktischen Empfehlungen im Unterricht eingesetzt. Unter anderem GAIDOSCHIK¹⁸¹ kritisiert den Einsatz dieses Materials für die Arbeit an der Orientierung im Zahlenraum, weil durch eine Reihe von Diskrepanzen zwischen der räumlichen Entfernung zweier Zahlen auf der Hundertertafel und deren Entfernung im Zahlenraum eher sogar „Desorientierung“ entstehen kann. So liegt zum Beispiel 10 auf der Hundertertafel näher bei 20 als bei 11.

5.2.2.4 Stellenwerttabelle

Abgesehen vom Eintragen von Zahlen in Stellenwerttabellen, sei auch „lange großer Wert auf die farbliche Kennzeichnung der Stellen gelegt“¹⁸² worden. Die tabellarische Form sei zum Aufbau von Verständnis der Zahlen durch Zerlegen dieser in die einzelnen Stellenwerte eingesetzt worden. Besonders bei der Erweiterung des Zahlenraums über 1000 solle diese Form der Zahldarstellung im Unterricht wieder Verwendung finden.

In diesem Bereich handelt die Lehrperson nach dem Wissensstand der aktuellen Fachdidaktik, indem die Stellenwerttabelle bei der Erweiterung des Zahlenraums wieder aufgegriffen wird. Um den Aufbau von Verständnis zu unterstützen, sollte

¹⁷⁹ vgl. SCHERER & MOSER OPITZ 2010, S. 145

¹⁸⁰ Transkript Lehrperson, Z 94

¹⁸¹ 2003a, S. 141

¹⁸² Transkript Lehrperson, Z 101

aber unbedingt darauf geachtet werden, dass das Eintragen von Zahlen reflektiert und nicht gedankenlos passiert.¹⁸³

5.2.3 Informationen über die Kinder

An dieser Stelle wird nur angeführt, welche Kompetenzen die Lehrperson zur Einteilung in „leistungsstarke“ und „leistungsschwache“ Kinder herangezogen und beurteilt hat. Auf die detaillierte Begründung der Wahl der einzelnen Kinder wird im folgenden Kapitel eingegangen.

In der Hälfte der Fälle wurde die Arbeitsgeschwindigkeit entweder als sehr hoch oder als unterdurchschnittlich langsam beurteilt. Bei den leistungsstarken Kindern wurde durchwegs die besondere Fähigkeit zu abstrahieren betont. Auch Zahlenverständnis, Verständnis von Operationen und die Fähigkeit, Gesetzmäßigkeiten zu erkennen, wurden zur Auswahl dieser Kinder herangezogen. Bei den leistungsschwachen Kindern gab es keine Defizite, die von der Lehrkraft bei allen in derselben Weise genannt wurden. Individuell wurden Schwierigkeiten wie zum Beispiel Probleme beim Umsetzen von Sachsituationen in mathematische Prozesse oder Unsicherheiten bei der Zahlauffassung und der Zuordnung im Zahlenraum sowie dem Herstellen von Querverbindungen zwischen Zahlvorstellungen hervorgehoben. Besonders betont wurde, wenn ein leistungsschwaches Kind trotz gewisser Defizite sehr fleißig war. Bequemlichkeit wurde hingegen negativ hervorgehoben.

5.3 Interpretation der Einzelinterviews mit den Kindern

Im folgenden Abschnitt werden die Ergebnisse der Interpretation der Einzelinterviews nach den in Kapitel 4.5.2 genannten Kriterien beschrieben. Im Zuge dessen wird auf die Forschungsfrage, welches Verständnis für das dezimale Stellenwertsystem die sechs Schülerinnen und Schüler am Beginn der vierten Schulstufe entwickelt haben, individuell für jedes Kind eingegangen.

5.3.1 Kind A (nach Lehrerurteil leistungsstark)

Kind A wurde durch die Lehrperson besonders aufgrund der hohen Arbeitsgeschwindigkeit als „leistungsstark“ eingestuft. Auch die Fähigkeit, Gesetzmäßigkeiten zu erkennen und zu abstrahieren, sowie das fundierte Zahlenraumverständnis waren ausschlaggebend für dieses Urteil. Im Jahreszeugnis der dritten Schulstufe wurde Kind A mit „Sehr gut“ beurteilt.

¹⁸³ vgl. SCHERER & MOSER OPITZ 2010, S. 143 f.; SCHERER & STEINBRING 2004, S. 165 ff.

5.3.1.1 Kategorie 1a: Einsicht in das Bündelungsprinzip – Schwerpunkt Bündeln

Aufgabe	5	6.1 / 6.3	6.2 / 6.3	7	8
Skalenniveau	S1a	S1	S1	S1	S1

Tabelle 4: Kind A - Einsicht in das Bündelungsprinzip - Schwerpunkt Bündeln

Wie in Tabelle 4 zu erkennen ist, hat Kind A durchwegs ein hohes Niveau der Einsicht in das Bündelungsprinzip mit dem Schwerpunkt Bündeln erreicht. Im Zuge der Bearbeitung der Aufgabe 5 begründete es das Umtauschen zehn niedrigerer Einheiten in die nächst höhere Einheit fundiert:

„Weil .. es maximal nur geht, dass es neun Einer sind. Und wenn man dann schon 10 Einer dazu gezählt hat, dann ist dann schon der nächste Zehner. Und da sind jetzt 12 und deswegen hat man den nächsten Zehner und 2 Einer dazu gezählt.“¹⁸⁴

Beim Abzählen von Mengen, die durch gebündelte Zehnergruppen und einzelne Steine dargestellt waren, zählte Kind A die Zehner als eigene Einheit in Einerschritten, übersetzte dies dann in die Zehnerzahl und addiert die Einer korrekt. In der Anwendung der Bündelungen verwendete es bei der ersten Frage die Gläser zwar, leerte diese aber aus, um 25 Steine darzustellen. Nachdem die Interviewerin die Bündelungen zur Zahldarstellung verwendet hatte, wurden diese von Kind A im Zuge der nächsten Aufgaben ebenfalls zum Legen von Mengen genützt. Die Anzahl der Eierkartons, die mit 43 Eiern vollgefüllt werden können, konnte mit Hilfe des Stellenwertsystems fundiert begründet werden:

„Weil in jeden Eierkarton (zeigt auf den Eierkarton) 10 reinkommen können. Und es gibt (zeigt auf die Zehnerstelle des Ziffernkärtchens) 4 Zehner, also 40 Eier, und dann noch die 3 Einer (zeigt auf die Einerstelle). Aber weil es ja heißen hat „voll machen“, deswegen kann man die 3 Einer nicht verwenden, also ja, bräuchte er noch einen Karton dazu.“¹⁸⁵

Reine Zehner- bzw. Hunderterdifferenzen konnte Kind A sehr schnell durch Rechnen mit Zahlenwerten der Ziffern in den Stellenwerten ermitteln. Dabei wurden die „Nullen weggedacht“, wobei die Anzahl der Nullen, die wieder angehängt werden mussten, begründet werden konnte.

Diese Ergebnisse liefern deutliche Hinweise dafür, dass Kind A ein tragfähiges Verständnis für die Anwendung des Bündelungsprinzips in Bezug auf Bündeln aufgebaut hat. Das Zählen von Zehnern in Einerschritten und Übersetzen in die Zehneranzahl kann als weiterer Hinweis dafür gewertet werden, dass es die

¹⁸⁴ Transkript Kind A, Z 110-112

¹⁸⁵ Transkript Kind A, Z 191-193

Vorstellungen von einem Zehner als Einheit bzw. als zehn Einern verknüpfen kann. Auch sind für das Kind drei verschiedene Darstellungen von 25 (unstrukturiert, in fünf Fünfergruppen gegliedert bzw. aus zwei Zehnern und fünf Einern zusammengesetzt) möglich und gültig.¹⁸⁶ Außerdem konnten die aufgebauten Konzepte auf den Zahlenraum 1000 erweitern werden, sodass sie nun auf symbolischer Ebene zum Lösen von Aufgaben angewendet werden.

5.3.1.2 Kategorie 1b: Einsicht in das Bündelungsprinzip – Schwerpunkt Entbündeln

Aufgabe	9	10	11
Skalenniveau	-	S1a	S1a

Tabelle 5: Kind A - Einsicht in das Bündelungsprinzip - Schwerpunkt Entbündeln

In dieser Kategorie waren nur Schwierigkeiten beim Rückwärtszählen erkennbar. Bei beiden Versuchen, rein verbal von 357 in Zehnerschritten rückwärtszuzählen, setzte Kind A bei 350 fort. Dabei waren in weitere Folge keine Schwierigkeiten bei der Hunderterunterschreitung erkennbar. Durch Blick auf die Ziffernfolge von 357 konnte dieses Kind korrekt in Zehnerschritten rückwärtszählen. Dabei sprach es aber deutlich langsamer und zeigte große Schwierigkeiten am Hunderterübergang, die Rückwärtszählen in Einerschritten vermuten lassen:

„A: 337, dreihundersiebenund (langgezogen) zwanzig, 317, 307, dreihundert, ähm, dreiundneun, nein, zweihunderdreiundneun, hach (überlegt, schaut nach oben); ähm (schaut in die Luft und bewegt die Lippen rhythmisch ohne etwas zu sagen; Finger bleiben ruhig; Augen bewegen sich), siebenundneunzig.“

I: Ok, die ganze Zahl? Also ...

A: 297, ähm, 287, 277 (spricht die Zahlwörter langgezogener und langsamer als vorher bei reinen Zehnerzahlen).¹⁸⁷

Das gedankliche Entbündeln eines Hunderteuroscheines, um diesen aufteilen zu könnten, stellte ebenso wie das Finden der Hälfte von 90 keine Schwierigkeiten dar. Die Lösung wurde fundiert mit Hilfe des Bündelungsprinzips begründet, wobei die Rechnung durch Wegdenken von Stellen und Rechnen in den Stellenwerten gelöst wurde:

„Weil man 90 nicht gut teilen kann, wie .. 9, ... habe ich einfach die Hälfte von 80 genommen und dann habe ich noch einen Fünfer dazugegeben, also zwei Fünfer sind dann ein Zehner.“¹⁸⁸

¹⁸⁶ vgl. GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 82 ff.

¹⁸⁷ Transkript Kind A, Z 240-244

¹⁸⁸ Transkript Kind A, Z 266-267

Ebenso wurde beim Errechnen der Hälfte von 500 vorgegangen:

„Weil man 5 wieder nicht gut teilen kann, genauso wie 9. Und ... und zwei Fünziger sind wieder ein Hunderter.“¹⁸⁹

Das Entbündeln von einer höheren Einheit in zehn Einheiten der nächst kleineren stellte für Kind A auf symbolischer und bildlich vorgestellter Ebene keine Schwierigkeit dar. Demnach kann auch bei diesem Aspekt des Bündelungsprinzips von einem fundierten Verständnis ausgegangen werden.¹⁹⁰ Schwierigkeiten bereitete nur das Rückwärtszählen in Zehnerschritten, wenn es sich nicht um eine reine Zehnerzahl handelt. Die aufgetretenen Probleme könnten aber als Hinweis dafür gesehen werden, dass solche Aufgaben zu wenig geübt wurden. Von mangelnder Einsicht in das Prinzip des Entbündelns kann aufgrund der oben dargestellten Probleme nicht ausgegangen werden.

5.3.1.3 Kategorie 2: Einsicht in das Stellenwertprinzip

Aufgabe	2	3 / 4	5	6.3
Skalenniveau	S1	S1	S1	S1

Tabelle 6: Kind A - Einsicht in das Stellenwertprinzip

Wie in Tabelle 6 erkennbar, entsprachen die Lösungswege des Kindes durchwegs einem hohen Skalenniveau. Es konnten sowohl der Wert, als auch die Stelle der Ziffer an der Zehnerstelle einer dreistelligen Zahl genannt werden. Außerdem wurde die größere Zahl strukturiert und durch das Stellenwertprinzip fundiert begründet gefunden. Darstellungen von dreistelligen Zahlen, deren Stellen durch Ziffern und den Stellenwerten zugeordnete Buchstaben gegeben waren, konnten in die richtigen Ziffernfolgen übersetzt werden. Dass dabei einfaches „Buchstabenwegdenken“ aber nicht immer zur richtigen Lösung führt, wurde sehr anschaulich wie folgt begründet:

„Ich habe jetzt die Buchstaben dazu genommen. Das ... Buchstabenwegzählen geht nämlich nur, ... wenn die in der richtigen Reihenfolge sind. Also Hunderter, Zehner und Einer, wenn die in der richtigen Reihenfolge sind.“¹⁹¹

Auch die Rolle der Null sowie die Auswirkungen des Weglassens derselben konnten verständlich erklärt werden:

„Der Nuller? Das bedeutet, dass da kein Einer mehr dazu ist. Da stehen 6 Hunderter und 2 Zehner. Und wenn da jetzt kein Nuller dazu ist, dann schreibt man da einen automatisch dazu, weil sonst würde das 62 sein.“¹⁹²

¹⁸⁹ Transkript Kind A, Z 279

¹⁹⁰ vgl. GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 92 f.

¹⁹¹ Transkript Kind A, Z 92-94

„Dann würden es .. nur 53 sein, weil dann hätte der Hunderter keine Bedeutung mehr, also muss immer an der richtigen Stelle ein Nuller sein.“¹⁹³

Abgesehen davon bereitete es dem Kind auch keine Probleme, Ziffern einer Zahl die entsprechenden Teilmengen einer gebündelten Darstellung zuzuordnen.

Insgesamt kann davon ausgegangen werden, dass Kind A ein tragfähiges Verständnis für das Stellenwertprinzip entwickelt hat, da es zwischen Ziffernwert, Stellenwert und dem daraus resultierenden Wert der Ziffer an der jeweiligen Stelle unterscheiden und verknüpfen kann. Außerdem ist ihm bewusst, dass es auf die korrekte Anordnung der Stellen in der Zifferschreibweise achten muss. Ebenso ist die Rolle der Null als Platzhalter für nicht besetzte Stellenwerte verinnerlicht. Dieses Wissen kann auch begründet im Rahmen von Rechenaufgaben angewendet werden.¹⁹⁴

5.3.1.4 Kategorie 3: Beziehung Ziffernfolge - Zahlwort

Unterkategorie	Ziffernfolge => Zahlwort	Zahlwort => Ziffernfolge
Skalenniveau	S1	S1

Tabelle 7: Kind A - Beziehung Ziffernfolge - Zahlwort

Während des gesamten Gesprächsverlaufs konnten keine Schwierigkeiten beim Übersetzen von Ziffernfolgen in Zahlwörter und umgekehrt erkannt werden. Deshalb wird der in diesem Bereich bereits entwickelte Stand prozeduralen Wissens über die Zahlwortbildung und das Notieren von Zahlen im Zahlenraum 1000 als hoch eingestuft.

5.3.1.5 Zusammenfassung

Kind A hat in allen untersuchten Bereichen bereits ein tragfähiges Verständnis für das Dezimalsystem entwickelt. Es hat Hunderter, Zehner und Einer konzeptuell verbunden und kann dieses Wissen auch beim Lösen von Aufgaben anwenden. Dabei begründet es immer fundiert unter Rückgriff auf die Prinzipien des Stellenwertsystems, wodurch das Vorhandensein rein prozeduralen Wissens ausgeschlossen werden kann. Nur im Bereich des Rückwärtszählens in Zehnerschritten sind Defizite zu erkennen, wenn die Ausgangszahl keine reine Zehnerzahl ist.

¹⁹² Transkript Kind A, Z 98-99

¹⁹³ Transkript Kind A, Z 103-104

¹⁹⁴ vgl. SCHERER & MOSER OPITZ 2010, S. 133

5.3.2 Kind B (nach Lehrerurteil leistungsstark)

Hohe Rechengeschwindigkeit, Zahlenverständnis und Verständnis für Operationen und das Abstrahieren waren für die Lehrpersonen ausschlaggebend, Kind B als „leistungsstark“ einzustufen. Im Jahreszeugnis der dritten Schulstufe wurde dieses Kind ebenfalls mit „Sehr gut“ beurteilt.

5.3.2.1 Kategorie 1a: Einsicht in das Bündelungsprinzip – Schwerpunkt Bündeln

Aufgabe	5	6.1 / 6.3	6.2 / 6.3	7	8
Skalenniveau	S1a	S1	S1	S1	S1

Tabelle 8: Kind B - Einsicht in das Bündelungsprinzip - Schwerpunkt Bündeln

Beim Schwerpunkt Bündeln erreichte Kind B durchwegs das höchste Skalenniveau. Die Teilaufgaben der Aufgabe 5 („4Z 12E = ____“) konnten auf symbolischer Ebene gelöst werden, indem das Ergebnis durch die Addition $40 + 12$ errechnet wurde. Auch das Beispiel 2H 13Z 4E wurde richtig gelöst, wobei aus der Begründung nicht eindeutig hervorging, ob rein prozedural oder aufbauend auf Einsicht in das Bündelungsprinzip gedacht wurde:

„... ich hab da auch wieder gerechnet, 6, also 2 Hunderter (zeigt auf 2H) plus 13 Zehner (zeigt auf 13Z), also den Einser (zeigt auf Ziffer 1 der Angabe 13Z) hab ich zu dem Zweier (zeigt auf 2H) dazugerechnet, sind 3, dann ist auch der Dreier (zeigt auf Ziffer 3 der Angabe 13Z) übrig geblieben, dann habe ich 33 (zeigt Hunderter und Zehnerstelle von 334) hingeschrieben und die (zeigt auf 4E) 4 Einer (zeigt auf Einerstelle von 334).“¹⁹⁵

Besonders die Tatsache, dass beim Zwischenergebnis von 33 (gesprochen als „dreißig“) die Rede war, lässt vermuten, dass die Ziffern ohne bewussten Bündelungsgedanke richtig verknüpft wurden. Möglicherweise beruhte die Lösung aber auch auf bereits automatisierten Konzepten. Bei gebündelten Zahldarstellungen zählte Kind B zunächst die Zehner in Einerschritten, errechnete sich durch Multiplikation mit dem Stellenwert die Zehnerzahl und zählte die Einer gegebenenfalls dazu. Zur Darstellung von 25 Steinen verwendete es die einzelnen Steine, wobei es sich um 4 Steine verzählte, und ordnete diese auf die Aufforderung, sie rasch erkennbar zu strukturieren, nach den Würfelbildern verschiedener Zahlen an. Dies wird aber nicht als mangelnde Einsicht in das Stellenwertsystem gedeutet, da die Aufgabe, die Menge schnell erfassbar anzuordnen, auch ohne Rückgriff auf Zehnerstrukturen erfüllt wurde. Eine Darstellung aus in Gläsern gebündelten und

¹⁹⁵ Transkript Kind B, Z 92-95

einzelnen Steinen konnte Kind B aber richtig deuten und verwendete in den weiteren Aufgaben immer von sich aus die Bündelungen zum Legen von Zahlen.

Beim gedanklichen Gruppieren von Anzahlen in Zehnergruppen begründet Kind B bei 43 Eiern zunächst fundiert, indem es nacheinander vier Zehnerkartons andeutete, in die jeweils zehn Eier gefüllt wurden. Bei der Frage, wie viele solcher Schachteln mit 123 Eiern vollgefüllt werden könnten, konnte durch die vage Begründung wie bei Aufgabe 5 nicht genau analysiert werden, ob dieses Beispiel rein prozedural oder durch Einsicht in das Bündelungsprinzip gelöst wurde:

„Da hab ich mir jetzt einfach die Drei weggegeben (deckt die Einerstelle von 123 ab), weil 3 kannst du ja nicht in den Karton (zeigt auf den Zehnerkarton) geben, weil es zu wenig sind. Und dann bleiben ja noch 12 (zeigt auf Hunderter und Zehnerstelle von 123) übrig.“¹⁹⁶

Reine Zehner- und Hunderterdifferenzen konnte Kind B sehr rasch ausrechnen und den Lösungsweg durch das Stellenwertsystem begründen. Dabei wurden nicht nur „die Nullen weggedacht“, sondern von der niedrigsten zur höchsten Stelle auf Differenzen überprüft, um diese dann in den Stellenwerten auszurechnen. Im Zuge dieser Erklärung wurde auch zwischen den Begriffen „Ziffer“ und „Zahl“ richtig unterschieden:

„B: Weil ich da auch mir wieder diese Zahlen (deckt Einer- und Zehnerstellen beider Ziffernkärtchen mit je einer Hand ab) weggeben konnte, und dann muss ich nur noch den Zweier (zeigt auf Hunderterstelle von 279) auf den Fünfer (zeigt auf Hunderterstelle von 579) rechnen.“

I: Und woher weißt du dann, dass das dann 300 sind und nicht 3?

B: Weil ... die Zahl (zeigt auf 579) besteht aus drei (zeigt auf 279)... Ziffern.“¹⁹⁷

Durch die Auswertung dieser Kategorie wird deutlich, dass es als Interviewer schwierig ist, hundertprozentig Einsicht in die Denkweisen der Schülerinnen und Schüler zu gewinnen. Das Kind konnte zwar alle Aufgaben rasch und richtig lösen, dennoch lassen die Begründungen der Lösungswege keine eindeutige Einschätzung zu, ob vermehrt prozedurales oder konzeptuelles Wissen über den Umgang mit Hundertern, Zehnern und Einern zur Bewältigung der Aufgaben angewendet wurde. In Bezug auf die Zahlauffassung ist aber eindeutig erkennbar, dass das Kind einen Zehner als Einheit sieht, die aus zehn Einern gebündelt wurde.¹⁹⁸

¹⁹⁶ Transkript Kind B, Z 172-174

¹⁹⁷ Transkript Kind B, Z 195-199

¹⁹⁸ vgl. SCHIPPER 2009, S. 120 f.

5.3.2.2 Kategorie 1b: Einsicht in das Bündelungsprinzip – Schwerpunkt Entbündeln

Aufgabe	9	10	11
Skalenniveau	-	S1a	S1a

Tabelle 9: Kind B - Einsicht in das Bündelungsprinzip - Schwerpunkt Entbündeln

Ebenso wie bei Kind A fielen in diesem Bereich nur die Schwierigkeiten beim Rückwärtszählen in Zehnerschritten auf. Von einer reinen Zehnerzahl konnte zügig und fehlerfrei gezählt werden. Anschließend war es zwar möglich, von 357 ohne Blick auf die Ziffernfolge zu zählen, bei der Hunderterunterschreitung traten jedoch große Unsicherheiten und Verzögerungen auf. Aufgaben, die das Entbündeln forderten, bereiteten Kind B aber weder in Bezug auf eine Situation mit Lebensbezug noch auf rein symbolischer Ebene Schwierigkeiten. Der Hunderterschein wurde gedanklich in zehn Zehnerscheine gewechselt, die Hälfte von 90 begründet durch die Malreihe (5 mal 9) gefunden. Beim gerechten Teilen von reinen Hunderterzahlen wurde eine Stelle weggedacht und anschließend wieder mit Hilfe der Fünfermalreihe gerechnet.

Auch in diesem Bereich des Bündelungsprinzips konnte nicht klar herausgefiltert werden, ob Kind B die Aufgaben vermehrt prozedural oder gestützt durch die Einsicht in das Entbündeln gelöst hat. Beim Rückwärtszählen in Zehnerschritten könnten sowohl mangelnde Übung bzw. mangelnde sprachliche Konzepte als auch Schwierigkeiten beim Entbündeln eines Hunderters der Grund für die Unsicherheiten gewesen sein.¹⁹⁹ Das Tauschen des Geldscheines hätte auch ohne Einsicht in das Stellenwertsystem gelingen können, weil bei dieser Aufgabe der Lebensbezug deutlich im Vordergrund steht. Da beim Halbieren auf Wissen über die Malreihen zurückgegriffen und das Entbündeln nicht erwähnt wurde, bleibt offen, ob Kind B die Entbündelung bewusst war. Deshalb kann keine begründete Aussage getroffen werden, welche Form von Wissen Kind B über das Entbündeln bereits aufgebaut hat.

5.3.2.3 Kategorie 2: Einsicht in das Stellenwertprinzip

Aufgabe	2	3 / 4	5	6.3
Skalenniveau	S1	S1	S2	S1

Tabelle 10: Kind B - Einsicht in das Stellenwertprinzip

Auffallend waren in diesem Bereich, wie in Tabelle 10 erkennbar, die Schwierigkeiten beim Übersetzen von Zahlen in Ziffernfolgen, deren Stellen durch Ziffern und den

¹⁹⁹ vgl. Kapitel 4.5.2.2

Stellenwerten zugeordnete Buchstaben gegeben waren. So bemerkte Kind B im Zuge der Erläuterung des Lösungsprozesses der Aufgabe $3Z\ 2E\ 7H = 327$ nicht, dass die Stellenwerte in vertauschter Reihenfolge angegeben waren. Die Begründung lässt auf rein prozedurales Vorgehen schließen: „Ich habe einfach da (zeigt auf die Angabe) die ... Buchstaben weggelesen.“²⁰⁰ Bei einer folgenden Aufgabe wurden die in von links nach rechts aufsteigend angegebenen Stellen aber dennoch richtig in eine Ziffernfolge übersetzt, woraus durchaus auf das Vorhandensein von Einsicht in das Positionsprinzip geschlossen werden kann.

Bei den übrigen Aufgaben zeigte Kind B keine Unsicherheiten. Es konnte sowohl den Wert als auch die Stelle der gefragten Ziffer nennen sowie die größte Zahl strukturiert herausfiltern. Auch wurde korrekt zwischen Ziffer und Zahl unterschieden.²⁰¹ Außerdem traten bei Aufgaben mit der Ziffer 0 an einer Position keine Schwierigkeiten auf. Ebenso war das Zuordnen von Teilmengen einer gebündelten Mengendarstellung zu Ziffern der entsprechenden Zahl kein Problem.

Dieses Kind hat durch seine Lösungsprozesse gezeigt, dass es bereits Einsicht in das Positionsprinzip gewonnen hat. Dennoch sind Fehler erkennbar, wenn Aufgaben zu schematischen Lösungen verlocken und dadurch das Wissen über die Konventionen des Notierens von Zahlen in Ziffernfolgen keine Anwendung findet.²⁰² Dies darf an dieser Stelle aber, begründet durch das korrekte Lösen der weiteren Aufgaben, vermutlich nicht als Hinweis auf mangelndes Verständnis interpretiert werden.

5.3.2.4 Kategorie 3: Beziehung Ziffernfolge - Zahlwort

Unterkategorie	Ziffernfolge => Zahlwort	Zahlwort => Ziffernfolge
Skalenniveau	S1	S1

Tabelle 11: Kind B - Beziehung Ziffernfolge – Zahlwort

In diesem Bereich waren während des gesamten Gesprächsverlaufs keine Unsicherheiten bemerkbar. Ziffernfolgen konnten rasch in Zahlwörter übersetzt werden, verbal diktierte Zahlen wurden zwar langsam, aber ohne Stockungen vom höchsten zum niedrigsten Stellenwert aufgeschrieben. Daraus kann geschlossen werden, dass das notwendige konventionelle Wissen über die Zahlwortbildung und

²⁰⁰ Transkript Kind B, Z 75 f.

²⁰¹ vgl. Kapitel 5.3.2.1

²⁰² vgl. SCHERER & MOSER OPITZ 2010, S. 133

das Notieren von entsprechenden Ziffernfolgen im Zahlenraum 1000 bereits gefestigt ist.

5.3.2.5 Zusammenfassung

Kind B erreicht nahezu bei allen Aufgaben ein hohes Skalenniveau, wobei dennoch keine fundiert begründete Aussage über das bereits aufgebaute Verständnis des Kindes gemacht werden kann.

Einen Zehner sieht das Kind als Einheit, die aus zehn Einern gebündelt wurde, wobei diese Vorstellung nicht an Material gebunden ist. Bei der Anwendung dieses Wissens geht aber durch die Begründungen nicht klar hervor, ob das Kind sich dabei mehr auf prozedurales oder konzeptuelles Wissen über den Umgang mit Zahlen des dekadischen Stellenwertsystems verlässt. So wurden Aufgaben, die das Bündeln forderten, auf symbolischer Ebene zwar richtig gelöst, das Zusammenfassen von zehn Einheiten zur nächsthöheren wurde dabei aber von Kind B nicht thematisiert. Ebenso ging bei der Beschreibung des Lösungsweges der gedanklichen Zehnerbündelung von 123 nicht hervor, ob dabei wirklich die Vorstellung des Bündelns eine Rolle spielte. Auch beim Errechnen reiner Hunderterdifferenzen konnte im Zuge der Analyse nicht zwischen „Zahlenwegdenken“ oder Rechnen mit Hunderterbündeln unterschieden werden. In Bezug auf das Entbündeln begründete das Kind nur mit gedanklichem Bezug zu konkretem Material aus der Lebenswelt durch Wechseln in kleinere Einheiten. Bei Aufgaben auf rein symbolischer Ebene wurde ohne erkennbares Bewusstsein eines Entbündlungsvorgangs vorgegangen. Auch traten Schwierigkeiten am Hunderterübergang beim Rückwärtszählen in Zehnerschritten auf, wenn die Ausgangszahl keine reine Zehnerzahl war.

Die Beziehung zwischen Ziffernfolge und Zahlwort wurde im Zahlenraum 1000 bereits verinnerlicht.

5.3.3 Kind C (nach Lehrerurteil leistungsstark)

Kind C zeichnet nach dem Urteil der Lehrperson die Fähigkeit, Gesetzmäßigkeiten herauszulesen und dies auch in Worte zu fassen, besonders aus. Auch könne dieses Kind hervorragend aus gegebenen Umständen abstrahieren. Im Jahreszeugnis der dritten Schulstufe wurde dieses Kind mit „Sehr gut“ beurteilt.

Auffallend war, dass Kind C sich während des Gesprächs oft verzählte und beim einzelnen Abzählen von 35 Steinen anfangs sogar einen Zehner vergaß.

5.3.3.1 Kategorie 1a: Einsicht in das Bündelungsprinzip – Schwerpunkt Bündeln

Aufgabe	5	6.1 / 6.3	6.2 / 6.3	7	8
Skalenniveau	S1b	S1	S2	S1	S1

Tabelle 12: Kind C - Einsicht in das Bündelungsprinzip - Schwerpunkt Bündeln

Bei Kind C zeigen sich in diesem Bereich erstmals Unsicherheiten. Die Aufgabe 4Z 12E = 52 konnte noch fundiert begründet gelöst werden:

„... den Zehner von den 12 Einern hab ich einfach (zeigt auf 4Z) als Zehner dazugegeben. Da ist dann statt einer Vier eine Fünf. Und dann hab ich einfach die zwei restlichen dazugegeben von den Einern.“²⁰³

Bei der Aufgabe 2H 13Z 4E wurde auf symbolischer Ebene zunächst richtig gebündelt, im Laufe der Erklärung des Rechenweges wurde das Ergebnis aber auf 217 ausgebessert und die Stellenwerte somit falsch verknüpft. Im Zuge der Lösung dieser Aufgabe mit Material erkannte Kind C aber während des Abzählens von zehn Zehnern zur Bündelung zu einem Hunderter selbstständig sofort, dass es das Beispiel falsch gelöst hatte. Dabei wurde auch fundiert mit Hilfe des Bündelungsprinzips begründet:

„1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 (zählt einzeln Zehnerscheine von den 13 Scheinen weg; bildet daraus einen Stapel). Dann ist die Rechnung falsch, weil die (gibt die 10 Zehnerscheine zum Vorrat) tausch ich in einen Hunderter (nimmt einen Hunderterschein vom Vorrat), weil das jetzt schon 10 Zehner sind. Dann haben wir 300 (legt den gewechselten Hunderterschein zu den 2 bereits aufgelegten Hunderterscheinen dazu). Dann haben wir noch 30 Zehner (legt die 3 übrigen Zehnerscheine neben die 3 Hunderterscheine), und haben wir noch 4 Einer (ordnet die Einer neben die gelegten Scheine).“²⁰⁴

Bei Aufgabe 6 wurden 25 Steine durch einzeln abgezählte Steine dargestellt, die nach Aufforderung zur besseren Ansicht in fünf Fünfergruppen angeordnet wurden. Von der Interviewerin mit einer Darstellung aus zwei mit zehn Steinen gefüllten Gläsern und fünf einzelnen Steinen konfrontiert, hielt das Kind zunächst an seiner Strukturierung fest, da es fünfmaliges Zählen der fünf Einer als 25 interpretierte. Nachdem die Gläser aber von der Interviewerin noch einmal näher ins Blickfeld gerückt wurden, konnte das Kind die Zahldarstellung mit Hilfe der Zehnerbündel richtig interpretieren. Bei weiteren Aufgaben wurden die Bündelungen nicht verwendet, es konnten aber problemlos Zehnergruppen hergestellt werden, um bei 35 Steinen Bezug zur Ziffernfolge herzustellen. Im Zuge dessen bemerkte das Kind auch, dass es zunächst nur 25 Steine abgezählt hatte.

²⁰³ Transkript Kind C, Z 99-100

²⁰⁴ Transkript Kind C, Z 119-123

Die übrigen Aufgaben dieser Kategorie bereiteten keine Schwierigkeiten. Gebündelte Gläser wurden in Einerschritten gezählt und das Ergebnis mal 10 gerechnet sowie gegebenenfalls vorhandene Einer addiert. Die Anzahl der gefüllten Eierkartons konnte fundiert mit Hilfe des Stellenwertsystems begründet werden:

„Weil jede 4 (zeigt auf die Zehnerstelle von 43) vorne bedeutet ein Zehner. Und das sind dann 4 Zehner, das heißt, 4 solche (nimmt Zehnerkarton in die Hand) Packungen, weil genau 10 Stück reinpassen. Und 3 bleiben ihm dann über.“²⁰⁵

„... 10 mal 10 ist Hundert. Das heißt (zeigt auf die Hunderterstelle von 123), er kann mal 10 vollfüllen. Und dann bleiben ihm 20 (zeigt auf die Zehnerstelle von 123), kann er mit 2 vollfüllen. Und das ist dann 12. Und 3 bleiben ihm übrig.“²⁰⁶

Reine Zehner- bzw. Hunderterdifferenzen rechnete dieses Kind sehr schnell aus, wobei es von der kleineren zur größeren Stelle überprüfte, ob diese übereinstimmten. War dies nicht der Fall, wurde die Aufgabe durch Rechnen mit den Zahlenwerten der Ziffern in den Stellenwerten gelöst. Die Zwischenergebnisse wurden danach durch gedankliches Anhängen der notwendigen Anzahl von Nullen wieder auf den entsprechenden Wert gebracht.

Kind C liefert durch seine Lösungen deutliche Hinweise darauf, dass es bereits ein fundiertes Verständnis für das Bündeln aufgebaut hat. Es weiß, dass zehn Einheiten zum nächsten Stellenwert gebündelt werden. Hunderter, Zehner und Einer sind somit konzeptuell verbunden, wobei bei einer Aufgabe noch der Blick auf Material mit Zehnerstruktur notwendig war. Die Handlung konnte in dem Fall allerdings fundiert begründet und im Voraus versprachlicht werden.²⁰⁷ Bezüglich der Anwendung des Wissens beim Lösen von Aufgaben konnte jedoch nicht zweifelsfrei unterschieden werden, ob dies vermehrt prozedural oder aufbauend auf konzeptuelles Wissen über Zehner, Einer und Hunderter geschah.

5.3.3.2 Kategorie 1b: Einsicht in das Bündelungsprinzip – Schwerpunkt Entbündeln

Aufgabe	9	10	11
Skalenniveau	-	S1a	S1a

Tabelle 13: Kind C - Einsicht in das Bündelungsprinzip - Schwerpunkt Entbündeln

Wie bereits bei Kind A und Kind B bereitete in dieser Kategorie ebenfalls nur das Rückwärtszählen in Zehnerschritten Probleme. Von 357 wurde zunächst stockend gezählt, wobei 317 ausgelassen wurde. Unsicherheiten zeigten sich auch bei der

²⁰⁵ Transkript Kind C, Z 209-210

²⁰⁶ Transkript Kind C, Z 216-218

²⁰⁷ vgl. GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 92 ff.

Hunderterunterschreitung. Um anschließend auch noch von 243 in Zehnerschritten rückwärtszählen zu können, musste die erste folgende Zahl zunächst durch Zählen in Einerschritten ermittelt werden. Dabei verzählte sich das Kind um eins und setzte bei 232 fort, wobei 212 ebenfalls ausgelassen wurde. Das Aufschreiben der um jeweils 10 kleineren Zahl gelang von 357 ausgehend fehlerfrei bis über die Hunderterunterschreitung hinaus, wobei bedingt durch die sprachlich begleitete inverse Schreibweise²⁰⁸ das Zähltempo sehr gering war und Stockungen entstanden. Bei der Hunderterunterschreitung änderte sich die Geschwindigkeit aber nicht.

Um den Hunderteuroschein aufteilen zu können, kam Kind C sofort auf die Idee, diesen in zwei Fünfzeuroscheine zu wechseln. Bei der Frage nach der Hälfte von 90 wurde zunächst angemerkt, dass das nicht möglich sei. Das Kind korrigierte seine Aussage aber sofort und errechnete mit Hilfe der Multiplikation von 5 mal 9 die Hälfte von 90. Es betonte bei der anschließenden Erläuterung auch, dass 9 zwar nicht teilbar wäre, 90 aber sehr wohl. Das Rechnen in den Stellenwerten zur Ermittlung der Hälfte von 500 wurde wie folgt erklärt:

„Weil 5 mal 5 ist 25, ... und das heißt, dass, .. 500 ist das gleiche, halt nur ... mit einem Nuller mehr dran. Man gibt immer, wenn man rechnet, einen Nuller weg. Das ist, wenn dann 500 wäre, das dann 50, wenn man einen Nuller weggeben würde, und dann 50, die Hälfte von 50 ist 25. Und dann muss man den Nuller bei 500 wieder dazugeben und einen bei 25 dazugeben.“²⁰⁹

Über das Verständnis, das dieses Kind in Bezug auf das Entbündeln aufgebaut hat, kann keine genaue Aussage gemacht werden. Die Probleme beim Rückwärtszählen in Zehnerschritten könnten auf mangelnde sprachliche Konzepte zurückzuführen sein. Beim schriftlichen Zählen war die inverse Schreibweise ausschlaggebend für die Verzögerungen. Das notwendige Entbündeln bereitete in dem Fall aber keine zusätzlichen Probleme.

Die Unsicherheiten bei der Ermittlung der Hälfte von 90 sowie die Erläuterungen zur Hälfte von 500 lassen vermuten, dass hier zwei verschiedene Prozeduren angewendet wurden. Zunächst versuchte das Kind, die Hälfte durch Rechnen in den Stellenwerten zu ermitteln. War dies bei einer ungeraden Ziffer nicht möglich, wurde auf das prozedurale Wissen der Malreihen zurückgegriffen. Ob diesen Prozeduren Verständnis und tragfähige Konzepte über das Entbündeln zugrunde liegen, konnte auch in diesem Fall nicht eindeutig festgestellt werden.

²⁰⁸ vgl. Kapitel 5.3.3.4

²⁰⁹ Transkript Kind C, Z 298-301

5.3.3.3 Kategorie 2: Einsicht in das Stellenwertprinzip

Aufgabe	2	3 / 4	5	6.3
Skalenniveau	S1	S1	S1	S1

Tabelle 14: Kind C - Einsicht in das Stellenwertprinzip

In Bezug auf das Positionsprinzip erreichte Kind C bei allen Aufgaben durchwegs ein hohes Skalenniveau. Zur Ziffer einer dreistelligen Zahl konnte sowohl die Anzahl der Einheiten als auch der Wert genannt werden. Die größte Zahl wurde strukturiert und durch den Stellenwert fundiert begründet ermittelt:

„Zehner sind mehr als Einer (zeigt auf die Zehnerstelle von 653). Und das heißt, egal ob das (zeigt auf die Einerstelle von 653) jetzt kleiner ist als das (zeigt auf die Einerstelle von 635), trotzdem ist das (zeigt auf 653) höher, weil ja der Zehner höher ist (zeigt auf die Zehnerstelle von 653).“²¹⁰

Auch beim Übersetzen von durch Ziffern und den Stellenwerten entsprechende Buchstaben dargestellten Zahlen in Ziffernfolgen tappte Kind C nur in die erste Falle, bei der die Stellenwerte nicht von links nach rechts absteigend angeordnet waren. Der Fehler wurde aber im Zuge der Erklärung des Lösungsweges sofort erkannt. Die Rolle der Null und die Auswirkungen des Weglassens derselben konnte durch die Änderung des Stellenwertes begründet werden:

„Deswegen muss man immer bei den Hunderter .. , wenn kein Einer ist, eine Null hinschreiben, dass man weiß, dass es ein Hunderter ist und kein Zehner.“²¹¹

Auch wurde im Zuge dessen zwischen einstelligen und mehrstelligen Zahlen klar differenziert:

„Das heißt, dass kein Zehner ist. Es gibt ja auch 1, 2, 3, 4, 5, das Normale, aber da muss man keinen Nuller dazu, weil noch keine höhere Stelle ist, wenn da nur Einer sind. Da sind schon Hunderter (zeigt auf Hunderterstelle von 503), deswegen muss man auch dazuschreiben, dass es Hunderter sind, weil es könnte ja auch heißen 53 (zeigt zuerst auf Einerstelle, dann auf Hunderterstelle von 503), wenn der Nuller nicht da wäre.“²¹²

Das Zuordnen von Teilmengen gebündelter Mengendarstellungen zu Ziffern der Zahl bereitete diesem Kind ebenfalls keine Schwierigkeiten.

Die dargestellten Lösungsansätze zeigen, dass Kind C bereits prozedurales Wissen über das Stellenwertprinzip aufgebaut hat. Es kann zwischen Stellenwert, Ziffernwert und Wert der Ziffern differenzieren und dieses Wissen auch beim Lösen von

²¹⁰ Transkript Kind C, Z 36-38

²¹¹ Transkript Kind C, Z 79-80

²¹² Transkript Kind C, Z 90-93

Aufgaben anwenden. Ebenso hat es die Regeln zur Anordnung der Stellenwerte in einer Ziffernfolge verinnerlicht und ist sich der Rolle der Null als Platzhalter für nicht besetzte Stellenwerte bewusst.²¹³

5.3.3.4 Kategorie 3: Beziehung Ziffernfolge - Zahlwort

Unterkategorie	Ziffernfolge => Zahlwort	Zahlwort => Ziffernfolge
Skalenniveau	S1	S1 i

Tabelle 15: Kind C - Beziehung Ziffernfolge - Zahlwort

Ziffernfolgen konnten rasch, fehlerfrei und ohne Stockungen in die richtigen Zahlwörter übersetzt werden. Gehörte oder selbst ausgesprochene Zahlwörter schrieb Kind C invers auf, wenn alle Stellenwerte besetzt waren. Dabei zeigte es aber keine Unsicherheiten, da im Laufe des Interviews alle Zahlwörter richtig notiert wurden. Auffallend war außerdem, dass dreistellige Zahlen mit einer Null an Einer- oder Zehnerstelle nicht invers vom größten zum kleinsten Stellenwert aufgeschrieben wurden.

5.3.3.5 Zusammenfassung

Die Lösungen und Erläuterungen des Kindes lassen in den einzelnen Teilbereichen verschiedene Vermutungen über das bereits aufgebaute Stellenwertverständnis zu. Im Bereich des Bündelns gab es deutliche Hinweise darauf, dass das Kind Zehner und Hunderter als Einheiten, die aus zehn Elementen gebündelt wurden, verstanden hat. Dabei war nur bei einer Aufgabe, die das Bündeln forderte, der Blick auf das Material notwendig. Die Notwendigkeit des Zusammenfassens wurde in dem Fall aber fundiert begründet und im Voraus versprochen. Auch kann vermutet werden, dass Kind C bereits prozedurales Wissen über das Positionsprinzip aufgebaut hat.

Im Bereich des Entbündelns konnte nicht klar herausgearbeitet werden, ob bei den gestellten Aufgaben vorrangig prozedurales oder konzeptuelles Wissen angewendet wurde. Schwierigkeiten waren auch beim Rückwärtszählen in Zehnerschritten erkennbar, wobei eine Verbindung zu den Unsicherheiten im Umgang mit der Diskrepanz zwischen Zahlwortbildung und Ziffernschreibweise in der deutschen Sprache vermutet werden kann. Zwischen Ziffernfolgen und Zahlwörtern kann Kind C trotz teilweiser inverser Schreibweise gehörter und selbst gesprochener Zahlwörter fehlerfrei und zügig übersetzen.

²¹³ vgl. SCHERER & MOSER OPITZ 2010, S. 133

5.3.4 Kind D (nach Lehrerurteil leistungsschwach)

Kind D braucht nach dem Urteil der Lehrperson mehr Zeit, um Dinge zu verstehen. Außerdem zeige es besonders beim Umsetzen von Sachsituationen in mathematische Prozesse große Schwierigkeiten, weshalb dieses Kind von der Lehrperson als „leistungsschwach“ eingestuft wurde. Mit sehr viel Fleiß und Einsatz könne Kind D aber gewisse Defizite wieder wettmachen, wodurch auch die Beurteilung „Sehr gut“ im Jahreszeugnis der dritten Schulstufe möglich gewesen sei.

5.3.4.1 Kategorie 1a: Einsicht in das Bündelungsprinzip – Schwerpunkt Bündeln

Aufgabe	5	6.1 / 6.3	6.2 / 6.3	7	8
Skalenniveau	S2	S1	S1	S1	S1

Tabelle 16: Kind D - Einsicht in das Bündelungsprinzip - Schwerpunkt Bündeln

Kind D zeigte in dieser Kategorie erste Unsicherheiten. Die Aufgaben 4Z 12E = 412 bzw. 2H 13Z 4E = 2134 wurden auf symbolischer Ebene nur durch Aneinanderreihen der Ziffern gelöst. Mit Rückgriff auf Material konnte allerdings auch nur mit Unsicherheiten eine Lösung gefunden werden. Zunächst nannte das Kind nur „40 und 12“²¹⁴ als Anzahl. Erst auf gezieltes Nachfragen der Interviewerin konnte es die Gesamtzahl folgendermaßen ermitteln:

„Ich hab von da (zeigt auf die Einer) 10 genommen und dann bleiben 2 übrig (zeigt auf 2 Einer). Das (zeigt auf die Zehner) ist 40, plus 10 (schiebt 10 Einer zur Seite) ist 50 und die 2 (zeigt auf die 2 übrigen Einer) noch dazu.“²¹⁵

Auf die Aufforderung, die Menge so zu legen, dass die Anzahl rasch erfasst werden könnte, wechselte Kind D ohne weitere Hinweise zehn Einer in einen Zehner und konnte anschließend fundiert begründen, warum die gewechselten Einer zur Zahldarstellung nicht mehr nötig waren.

Zehnerbündel zählte dieses Kind in Einerschritten und nannte anschließend die Zehnerzahl, wozu gegebenenfalls Einer addiert wurden. Im Zuge der Aufgaben 6.2 und 6.3 griff es als einziges Kind sofort zu den Zehnerbündelungen, um 25 bzw. 35 Steine darzustellen. Die Anzahl gefüllter Zehnerkartons wurde mit Hilfe der Zehnerreihe (4 mal 10 bzw. 12 mal 10) ermittelt. Reine Zehner- bzw. Hunderterdifferenzen konnten prompt durch Rechnen mit den Zahlenwerten der Ziffern bei korrekter Berücksichtigung ihrer Stellenwerte ermittelt werden.

²¹⁴ Transkript Kind D, Z 92

²¹⁵ Transkript Kind D, Z 98-99

Die dargestellten Lösungen der Aufgaben sind ein Hinweis darauf, dass das Kind auf enaktiver Ebene einen Zehner mit zehn Einern konzeptuell verbunden sieht und dieses Wissen auch beim Lösen von Aufgaben bzw. zur Zahldarstellung anwendet. Auf symbolischer Ebene sind bei Beispielen, die das Bündeln fordern, Schwierigkeiten zu erkennen. Beim Ermitteln von enthaltenen Zehnerbündeln und dem Errechnen von reinen Hunderter- bzw. Zehnerdifferenzen konnte durch die Begründungen nicht geklärt werden, ob die Aufgaben aufbauend auf prozeduralem oder konzeptuellem Wissen gelöst wurden. Insgesamt kann deshalb von einem nicht gänzlich gesicherten Verständnis für das Bündeln ausgegangen werden.²¹⁶

5.3.4.2 Kategorie 1b: Einsicht in das Bündelungsprinzip – Schwerpunkt Entbündeln

Aufgabe	9	10	11
Skalenniveau	-	S1a	S1b

Tabelle 17: Kind D - Einsicht in das Bündelungsprinzip - Schwerpunkt Entbündeln

Beim verbalen Rückwärtszählen von 357 in Zehnerschritten waren große Probleme erkennbar. Zunächst wurde mit 356 fortgesetzt. Auch von 350 konnte nur mit Zahlauslassungen und Unsicherheiten bei der Hunderterunterschreitung gezählt werden. Mit Blick auf die Ziffernfolge der Startzahl 357, wurde anschließend verbal von 375 in Einerschritten gezählt. Schriftlich konnte von 357 in Zehnerschritten richtig rückwärts gezählt werden, wobei durch die unsichere sprachliche Begleitung gleichmäßig Stockungen beim Notieren der Zahlen auftraten. Bei der Hunderterunterschreitung waren keine vermehrten Schwierigkeiten erkennbar.

Der Hunderteuroschein wurde in zwei Fünfzeiroscheine gewechselt. Die Hälfte von 90 konnte auf symbolischer Eben nicht ermittelt werden. Durch Rückgriff auf Rechengeld konnte die Aufgabe allerdings selbstständig und fundiert begründet gelöst werden:

„Den Zehner (zeigt auf den gewechselten Zehnerschein) hab ich statt zwei Fünfer (zeigt auf eine Gruppe aus 5 Einern), und 5 und 5 (zeigt auf die beiden Gruppen aus 5 Einern) ist 10, also ist da 90 gegeben. Und die zwei Vier (zeigt auf die beiden Vierergruppen aus 4 Zehnerscheinen) ergeben 80, .. und halt noch mit denen (zeigt auf die zwei Gruppen aus 5 Einermünzen) ist es 90.“²¹⁷

Auch in diesem Teilbereich kann bei Kind D nicht von gänzlich gefestigtem Verständnis für das Entbündeln ausgegangen werden, da die Aufgaben teilweise nur gebunden an Materialvorstellungen bzw. durch Handeln mit konkretem Material

²¹⁶ vgl. GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 89 ff.

²¹⁷ Transkript Kind D, Z 2

gelöst werden konnten.²¹⁸ Die Schwierigkeiten beim Zählen können durchaus auf die fehlenden sprachlichen Konzepte zurückzuführen sein, da dieses Kind während des gesamten Gespräches mehrfach Unsicherheiten bei der sprachlichen Umsetzung von Ziffernfolgen und Zahlwörtern zeigte.²¹⁹

5.3.4.3 Kategorie 2: Einsicht in das Stellenwertprinzip

Aufgabe	2	3 / 4	5	6.3
Skalenniveau	S2	S1	S2	S1

Tabelle 18: Kind D - Einsicht in das Stellenwertprinzip

Auf die Frage, was die Ziffer 4 in 246 bedeutet, konnte Kind D nur „die Zehnerstelle“ nennen. Der Wert der Ziffer konnte jedoch auch durch gezieltes Nachfragen nicht genannt werden. Die größte Zahl konnte rasch und problemlos herausgefunden werden. Dabei verglich Kind D von der größten zur kleinsten Stelle und begründete durch den Wert derselben:

„Weil 600 (zeigt auf die Hunderterstelle von 653) ist größer als 500 (zeigt auf die Hunderterstelle von 563) und die 50 (zeigt auf die Zehnerstelle von 653) ist größer als die 30 (zeigt auf die Zehnerstelle von 635).“²²⁰

Wenn das Kind Zahlen, die durch Ziffern und die den Stellenwerten entsprechenden Buchstaben angegeben waren, in Ziffernfolgen übersetzen sollte, traten ebenfalls Schwierigkeiten auf. Seinen Fehler bei der ersten Aufgabe, bei der die Stellenwerte nicht in absteigender Reihenfolge von links nach rechts notiert waren, erkannte das Kind im Zuge der Erklärung des Lösungsweges selbst. Dabei erläuterte es auch, dass die Hunderter zuerst kommen müssen, weil sie zur größeren Einheit gehören. Beim Übersetzen von Zahlen mit unbesetzten Stellenwerten zeigten sich aber Unsicherheiten: 6H 2Z wurde als 602 interpretiert. Beim Zuordnen von Ziffernkärtchen zu gebündelten Zahldarstellungen von 35 und 53 zögerte Kind D kurz, ordnete schlussendlich aber richtig zu und konnte auch die Teilmengen mit den Ziffern in Verbindung bringen.

Ebenso wie bei den Kategorien 1a und 1b kann auch in Bezug auf das Positionsprinzip nicht von einem tragfähigen Verständnis ausgegangen werden, da nahezu bei allen Aufgaben Unsicherheiten erkennbar waren. Die größte Zahl konnte

²¹⁸ vgl. GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 89 ff.

²¹⁹ vgl. Kapitel 5.3.4.4

²²⁰ Transkript Kind D, Z 35-36

zwar problemlos prozedural gefunden werden, dennoch lässt die Begründung keine fundierte Aussage über zugrundliegende Konzepte zu.²²¹

5.3.4.4 Kategorie 3: Beziehung Ziffernfolge - Zahlwort

Unterkategorie	Ziffernfolge => Zahlwort	Zahlwort => Ziffernfolge
Skalenniveau	S2	S2

Tabelle 19: Kind D - Beziehung Ziffernfolge - Zahlwort

In diesem Bereich traten während des gesamten Gesprächsverlaufs vermehrt Unsicherheiten auf. Gesprochene Zahlwörter konnten zwar fehlerfrei in Ziffernfolgen übersetzt werden, dennoch war beim Notieren der Zehnerstelle dreistelliger Zahlen fast immer ein Zögern bemerkbar. Ausnahmen stellten die Zahlen 277 und 704 dar, die zügig geschrieben wurden. Die Ziffernfolgen wurden aber mit Ausnahme von 59 nicht invers geschrieben. Die Reaktion des Kindes nach Notieren der Einerstelle von 59 zeitlich vor der Zehnerstelle lässt aber vermuten, dass es sich über die inverse Schreibweise geärgert hatte.

Beim Übersetzen von Ziffernfolgen in Zahlwörter waren ebenfalls mehrfach Unsicherheiten erkennbar. Oft zögerte Kind D oder setzte dazu an, die Zehnerstelle als Einerstelle zu nennen. Besonders auffällig waren auch die Schwierigkeiten beim verbalen Rückwärtszählen. Von der schriftlich notierten Ziffernfolge 357 wurde wie folgt in Zehnerschritten rückwärtsgezählt: 375, 374, 373. Da anschließend bei der schriftgestützten Variante dieser Aufgabe keine Probleme auftraten, kann vermutet werden, dass zwar gedanklich in Zehnerschritten gezählt wurde, die symbolisch vorgestellten Zahlen aber verdreht ausgesprochen wurden.²²²

5.3.4.5 Zusammenfassung

Kind D hat zwar durchaus erste Einsichten in das Bündelungsprinzip gewonnen, diese sind allerdings vermehrt noch an Materialvorstellungen oder das konkrete Handeln mit Materialien gebunden. Im Bereich des Positionsprinzips waren ebenfalls noch Unsicherheiten bei der Interpretation und Zuordnung von Ziffernfolgen erkennbar. Ebenso bereitet die Diskrepanz zwischen Schreib- und Sprechweise von Zahlen in der deutschen Sprache Kind D noch Schwierigkeiten. Deshalb kann in diesem Fall von einem nicht gänzlich gefestigten Stellenwertverständnis ausgegangen werden.

²²¹ vgl. SCHERER & MOSER OPITZ 2010, S. 133

²²² vgl. SCHIPPER 2009, S. 125

5.3.5 Kind E (nach Lehrerurteil leistungsschwach)

Kind E wurde von der Lehrperson als „leistungsschwach“ beurteilt. Es zeige Schwierigkeiten bei der Zahlauffassung und der Zuordnung im Zahlenraum. Auch bereitete die Erarbeitung des Einmaleins Probleme. Da dieses Kind im Zahlenraum 10 gesichert und im Zahlenraum 20 ausreichend gefestigt sei, falle ihm das fast mechanische schriftliche Subtrahieren und Addieren relativ leicht. Die Lehrperson betonte aber, dass dies noch keine Querverbindung zur Zahlvorstellung sichern würde. Kind E wurde im Jahreszeugnis der dritten Schulstufe mit „Gut“ beurteilt.

5.3.5.1 Kategorie 1a: Einsicht in das Bündelungsprinzip – Schwerpunkt Bündeln

Aufgabe	5	6.1 / 6.3	6.2 / 6.3	7	8
Skalenniveau	S3	S3	S2	S1	S1

Tabelle 20: Kind E - Einsicht in das Bündelungsprinzip - Schwerpunkt Bündeln

Kind E hatte im Bereich des Bündelns vermehrt große Schwierigkeiten. Bei der Aufgabe 4Z 12E vermutete es zwar zunächst richtig, dass es durch die zwölf Einer ein Zehner mehr sein könnte, war sich aber so unsicher, dass es zum Legen der Aufgabe mit Rechengeld überging. Im Zuge dessen traten große Schwierigkeiten beim Abzählen der dargestellten Menge auf, da Einermünzen in Zehnerschritten gezählt wurden. Durch Unterstützung konnte die Anzahl schlussendlich doch noch ermittelt werden. Zwischen der Darstellung aus vier Zehnern und zwölf Einern und der von der Interviewerin gelegten Menge aus fünf Zehnern und 2 Einern konnte Kind D aber keinen Bezug herstellen. Ähnliche Schwierigkeiten traten beim materialgestützten Lösen der Aufgabe 2H 13Z 4E auf. Zunächst zählte das Kind zwei Hunderterscheine und neun Zehnerscheine mit dem Ergebnis 290 richtig ab. Anschließend zählte es zwei weitere Zehnerscheine mit den Zahlwörtern 1000 und 10 000, wunderte sich aber über das hohe Ergebnis. Die korrekte Anzahl der dargestellten Menge (2 Hunderterscheine, 13 Zehnerscheine und 4 Einermünzen) konnte anschließend nur mit Unterstützung ermittelt werden. 334 konnte Kind B mit Rechengeld durch 3 Hunderterscheine, 3 Zehnerscheine und 4 Einermünzen richtig darstellen. Wie bereits bei der Aufgabe 4Z 12E konnte aber auch bei der Aufgabe 2H 13Z 4E keine Beziehung zwischen der gebündelten und der ungebündelten Mengendarstellung hergestellt werden.²²³

Zehnerbündel zählte Kind E in Zehnerschritten. Beim Versuch, diese in Einerschritten zu zählen und dann in eine Zehnerzahl zu übersetzen, scheiterte es. Zur

²²³ vgl. Transkript Kind E, Z 120-198

Zahldarstellung wurden die Zehnerbündel von Kind E erst nach Gebrauch durch die Interviewerin verwendet. Dabei entstanden Darstellungen aus gebündelten und ungebündelten Zehnern, wobei zur Verdeutlichung der Ziffer an der Zehnerstelle eine Zehnergruppe aus den einzelnen Steinen hergestellt werden konnte.

Die Anzahl an Zehnerkartons, die mit 43 Eiern gefüllt werden können, konnte das Kind rasch ermitteln. Bei 123 Eiern waren Unsicherheiten erkennbar, wobei schlussendlich zunächst der Hunderter in zehn Zehner zerlegt und das Zwischenergebnis mit dem der Zehnerstelle addiert wurde. Das Gesamtergebnis wurde anschließend durch die Zehnermalreihe kontrolliert. Reine Hunderter- und Zehnerdifferenzen konnten rasch durch Rechnen mit den Zahlenwerten der Ziffern in den Stellenwerten ermittelt werden, wobei als Ergebnis zunächst die Zifferndifferenz anstelle des eigentlichen Wertes genannt wurde.

Die beschriebenen Lösungen des Kindes sind deutliche Hinweise darauf, dass Kind E große Defizite beim Verständnis des Bündelungsprinzips aufweist und die Einheiten nicht konzeptuell verbunden hat. Selbst mit Unterstützung kann auf enaktiver Ebene kein Bezug zwischen einer bereits gebündelten und einer ungebündelten Zahldarstellung hergestellt werden. Ebenso sind beim Abzählen von gelegten Mengen mit Zehnerstruktur große Schwierigkeiten am Wechsel der Einheiten bzw. beim Hunderterübergang erkennbar. Auf symbolischer Ebene kann vermutet werden, dass zur Lösung der Aufgaben vermehrt prozedurales Wissen angewendet wurde.²²⁴

5.3.5.2 Kategorie 1b: Einsicht in das Bündelungsprinzip – Schwerpunkt Entbündeln

Aufgabe	9	10	11
Skalenniveau	-	S1a	S2

Tabelle 21: Kind E - Einsicht in das Bündelungsprinzip - Schwerpunkt Entbündeln

Beim Rückwärtszählen in Zehnerschritten traten bei Kind E große Probleme auf, was sowohl einen Mangel in den aufgebauten sprachlichen Konzepten als auch zu geringe Einsicht in das Entbündeln vermuten lässt. Von 350 konnte verbal nur mit Zahlauslassungen (300) und stockend gezählt werden. Von 357 hatte Kind E sowohl verbal als auch in der schriftgestützten Variante deutliche Schwierigkeiten bei der Hunderterunterschreitung. Auch hier wurde sehr stockend und langsam gezählt.

Das Entbündeln eines Hunderterscheines stellte, vermutlich bedingt durch die Vorstellung konkreten Materials, keine Schwierigkeiten dar. Zur Ermittlung der Hälfte

²²⁴ vgl. SCHIPPER 2009, S. 120

von 90 musste allerdings auf eine Lösung mit Rechengeld zurückgegriffen werden, wobei Kind E nur durch gezieltes Nachfragen der Interviewerin auf die Idee des Entbündelns kam. Das Abzählen der durch Materialhandlung ermittelten Hälfte bereitete allerdings wieder große Schwierigkeiten.

Die dargestellten Lösungen der Aufgaben sind ein Hinweis darauf, dass die Einsicht in das Entbündeln noch nicht gefestigt ist. Gibt es einen Bezug zur Lebenswelt, können Einheiten problemlos aufgebrochen werden. Beim Lösen einer komplexeren Aufgabe, die das Entbündeln als Teilschritt erfordert, treten aber auch auf enaktiver Ebene noch große Schwierigkeiten auf. Die Schwierigkeiten beim Rückwärtszählen lassen ebenfalls vermuten, dass noch kein tragfähiges Verständnis des Bündelungsprinzips aufgebaut wurde.²²⁵

5.3.5.3 Kategorie 2: Einsicht in das Stellenwertprinzip

Aufgabe	2	3 / 4	5	6.3
Skalenniveau	S2	S2	S2	S1

Tabelle 22: Kind E - Einsicht in das Stellenwertprinzip

Kind E konnte den Wert der Ziffer 4 in der Zahl 246 nur mit Schwierigkeiten und durch Vorschläge seitens der Interviewerin nennen. Das Ermitteln der größten Zahl dauerte bei der Preisliste der Fahrräder zwar lange, Kind E ging dabei aber strukturiert vom größten zum kleinsten Stellenwert vor. Beim Vergleich von 299 und 305 nannte dieses Kind zunächst die Zahl 299, korrigierte den Fehler aber selbst im Zuge der Begründung. Ob dabei gestützt auf konzeptuelles oder prozedurales Wissen vorgegangen wurde, konnte aus der folgende Erklärung nicht eindeutig entnommen werden:

„... weil ja der Hunderter da größer ist, obwohl da (zeigt auf Zehnerstelle von 299) der Neuner steht. Aber da (zeigt auf 305) ist der Hunderter größer, und .. der Hunderter zählt wieder mehr als der Zehner.“²²⁶

Zahlen, deren Stellen durch Ziffern und den Stellenwerten zugeordneten Buchstaben gegeben waren, konnte Kind E zumeist richtig in Ziffernfolgen übersetzen. 3Z 2E 7H übertrug es allerdings fehlerhaft in die Ziffernfolge 327. Dieser Fehler wurde vom Kind erst erkannt, als es von der Interviewerin mit dem richtigen Ergebnis konfrontiert wurde. Bei Beispielen mit unbesetzten Stellenwerten traten keine Schwierigkeiten auf, der Stellenwert der 0 konnte aber nicht genannt werden:

²²⁵ vgl. GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 87 ff.

²²⁶ Transkript Kind E, Z 64-65

„I: Und was bedeutet die Null da in der Mitte (zeigt auf Zehnerstelle von 503)?

E: 103, weil da könnte - sonst würde es heißen, ähm, fünfund, 53.“²²⁷

Die Teilmengen einer gebündelten Zahldarstellung konnten den Ziffern der entsprechenden Ziffernfolge zugeordnet werden. Dabei sprach Kind E aber nicht von der Einheit (zum Beispiel 3 Zehner), sondern von der Anzahl an Einern (30).

Auch im Bereich des Stellenwertprinzips kann bei Kind E nicht von einem tragfähigen Verständnis ausgegangen werden. Sowohl beim Größenvergleich dreistelliger Zahlen als auch beim Übersetzen von Zahldarstellungen aus Ziffern und den Stellenwerten zugeordneten Buchstaben in entsprechende Ziffernfolgen waren Unsicherheiten erkennbar. Ebenso war es dem Kind nicht ohne Probleme möglich, einer Ziffer den entsprechenden Wert zuzuordnen.²²⁸

5.3.5.4 Kategorie 3: Beziehung Ziffernfolge - Zahlwort

Unterkategorie	Ziffernfolge => Zahlwort	Zahlwort => Ziffernfolge
Skalenniveau	S1	S1

Tabelle 23: Kind E - Beziehung Ziffernfolge – Zahlwort

Kind E zeigte beim Übersetzen von gesprochenen Zahlwörtern in Ziffernfolgen während des Gesprächs keine Unsicherheiten, wobei die Aufgaben langsam und bedacht gelöst wurden. Umgekehrt konnten Ziffernfolgen die entsprechenden Zahlwörter meist problemlos zugeordnet werden. Deshalb kann von einem tragfähigen Verständnis für die Beziehung zwischen Ziffer und Zahlwort im Zahlenraum 1000 ausgegangen werden.

5.3.5.5 Zusammenfassung

Die Untersuchung ergab, dass bei Kind E nicht von einem tragfähigen Stellenwertverständnis ausgegangen werden kann. Sowohl die Schwierigkeiten im Bereich des Bündelns als auch beim Entbündeln zeigen, dass die Einheiten Einer, Zehner und Hunderter konzeptuell noch nicht ausreichend miteinander verbunden sind. Auch auf enaktiver Ebene waren bei diesen Aufgaben keine selbstständigen Lösungen ohne Probleme möglich. In Bezug auf das Positionsprinzip waren auf symbolischer Ebene bei allen Aufgaben Unsicherheiten erkennbar. Bereits gebündeltem Material konnten die entsprechenden Stellenwerte aber zugeordnet werden. Zwischen Ziffernfolgen und Zahlwörtern kann das Kind im Zahlenraum 1000

²²⁷ Transkript Kind E, Z 105-106

²²⁸ vgl. SCHERER & MOSER OPITZ 2010, S. 133

zwar fehlerfrei hin und her übersetzen, besonders beim Zählen in Zehnerschritten treten aber große Schwierigkeiten auf.

5.3.6 Kind F (nach Lehrerurteil leistungsschwach)

Kind F sei sehr bequem und „kann ..., wenn es ... gerade Spaß macht, ... in Prinzip alle Dinge recht gut“²²⁹, gebe sich aber „auch mit weniger zufrieden“²³⁰. Demnach wurde dieses Kind besonders aufgrund seiner Bequemlichkeit von der Lehrperson als „leistungsschwach“ eingestuft. Die Erarbeitung des Einmaleins sei ebenfalls schwierig gewesen, additive Rechenoperationen würden im Gegensatz dazu kein Problem darstellen. Im Jahreszeugnis der dritten Schulstufe wurde Kind F mit „Gut“ beurteilt.

5.3.6.1 Kategorie 1a: Einsicht in das Bündelungsprinzip – Schwerpunkt Bündeln

Aufgabe	5	6.1 / 6.3	6.2 / 6.3	7	8
Skalenniveau	S1a	S1	S3	S1	S1

Tabelle 24: Kind F- Einsicht in das Bündelungsprinzip - Schwerpunkt Bündeln

Auffallend waren bei Kind F in diesem Bereich die Schwierigkeiten, zur Darstellung der Zehnerstelle einer Ziffernfolge auf enaktiver Ebene aus einer ungebündelten Menge Zehnergruppen herzustellen. Der Fokus des Kindes lag immer auf einer Fünferbündelung, die entsprechend dem Würfelbild angeordnet wurde. Zwei solche Teilmengen als einen Zehner zu erkennen, fiel ihm aber sehr schwer, obwohl das Kind durch Papierstreifen bereits drei Zehnergruppen abgegrenzt hatte.²³¹ Die vorab hergestellten Zehnerbündelungen verwendete Kind F zur Zahldarstellung nicht.

Bei den anderen Aufgaben konnte durchwegs ein hohes Skalenniveau erreicht werden. Bei der fehlerhaften Lösung $4Z\ 12E = 412$ war sich das Kind nicht sicher, konnte aber anschließend durch einen kurzen Blick auf das Rechengeld, ohne die Menge zu legen, sofort begründen, wie es in weiterer Folge auf das richtige Ergebnis gekommen war:

I: Das heißt, was ist mit diesem Einser da (zeigt auf die Ziffer 1 in der Angabe 12E) passiert?

²²⁹ Transkript Lehrperson Z 169-170

²³⁰ Transkript Lehrperson Z 152

²³¹ vgl. Transkript Kind F, Z 262-337

*F: Der Einser, ... das ist zehn (zeigt auf 12E). Das ist .. zehn und das ist .. sozusagen noch ein Zehner.*²³²

Die Aufgabe 2H 13Z 4E konnte anschließend auf symbolischer Ebene sofort richtig gelöst werden. Bei der Anzahlermittlung von Mengen, die aus Zehnern und Einern dargestellt waren, konnten die Zehnerbündel sowohl in Einer- als auch in Zehnerschritten richtig gezählt und gegebenenfalls durch Einer ergänzt werden. Die Anzahl der vollgefüllten Eierkartons konnte Kind F korrekt ermitteln, wobei die Antwort bei 47 Eiern nicht prompt gegeben werden konnte, sondern kurz ohne Blick auf das Ziffernkärtchen überlegt wurde. Bei 123 Eiern wurde das gedankliche Bündeln in Zehner wie folgt erklärt:

*F: Die Hundert (zeigt auf die Hunderterstelle von 123) sind .. 10 Packungen, ... und die 20 (zeigt auf die Zehnerstelle von 123) sind 2 Packungen, also 12 Packungen. Und die 3 ..., die bleiben übrig.*²³³

Reine Zehner- und Hunderterdifferenzen konnten richtig ermittelt werden, wobei auch hier die Antwort zögernd gegeben wurde. Dabei rechnete Kind F mit den Zahlenwerten der Ziffern in den Stellenwerten.

In Bezug auf Bündeln müssen auch noch die Schwierigkeiten beim schriftgestützten Rückwärtszählen in Zehnerschritten erwähnt werden. Von 375 ausgehend gelang das Rückwärtszählen fehlerfrei und zügig. Von der zweiten Startzahl 357 ausgehend scheiterte das Kind aber. Zunächst merkte es an, dass das Rückwärtszählen „wegen den 2 von der 7“²³⁴ nicht möglich sei. Beim schriftgestützten Zählen mit der Startzahl 357 errechnete es anschließend die Zahl 348 als um 10 kleinere Zahl. Aus der Begründung konnte folgender Gedankengang interpretiert werden: 7 wurde in 5 und 2 aufgeteilt. Anschließend rechnete das Kind $357 - 5 = 350$ und $350 - 2 = 348$. Von 348 wurde auf entsprechende Weise 337 als um 10 kleinere Zahl ermittelt: 8 wurde in 5 und 3 aufgeteilt. Danach rechnete Kind F $348 - 5 = 340$ und $340 - 3 = 337$.

Die oben erläuterten Unsicherheiten sind Hinweise für Defizite im Verständnis des Bündelungsprinzips. Bei bereits gebündelten Zahldarstellungen konnte das Kind einen Zusammenhang zwischen Ziffern und Teilmengen erkennen. Beim selbstständigen Herstellen von Zehnerbündeln auf enaktiver Ebene traten aber große Schwierigkeiten auf. Dadurch kann vermutet werden, dass die Vorstellung mehrstelliger Zahlen als Zusammensetzungen aus gebündelten Einheiten noch nicht gänzlich mit der Vorstellung ihrer Zusammensetzung aus lauter Einern konzeptuell

²³² Transkript Kind F, Z 132-133

²³³ Transkript Kind F, Z 370-373

²³⁴ Transkript Kind F, Z 412

verbunden wurde.²³⁵ Ebenso wurde das Rückwärtszählen in Zehnerschritten nicht als quantitative Verminderung um zehn Einzelne bzw. einen Zehner verstanden.²³⁶ Auffallend ist bei beiden Aufgaben die deutliche Fokussierung auf eine Fünferbündelung.

In Zahlen enthaltene Anzahlen von Zehnerbündeln sowie reine Zehner- und Hunderterdifferenzen konnten zwar ermittelt werden, das Zögern beim Lösen der Aufgaben lässt aber Rückschlüsse darauf zu, dass das Anwenden der Stellenwertprinzipien für systematisches Rechnen noch nicht gefestigt ist. Auch kann vermutet werden, dass beim Rechnen in den Stellenwerten prozedural vorgegangen wurde.

5.3.6.2 Kategorie 1b: Einsicht in das Bündelungsprinzip – Schwerpunkt Entbündeln

Aufgabe	9	10	11
Skalenniveau	-	S1a	S1a

Tabelle 25: Kind F- Einsicht in das Bündelungsprinzip - Schwerpunkt Entbündeln

Aufgrund der in Kapitel 5.3.6.1 dargestellten Schwierigkeiten beim schriftgestützten Rückwärtszählen in Zehnerschritten kann vermutet werden, dass das Kind von 375 zwar zügig und fehlerfrei, aber vorrangig prozedural ohne bewusstes Entbündeln gezählt hat.²³⁷ Das mentale Zerlegen eines Hunderterscheins in zwei Fünzigerscheine bereitete Kind F keine Probleme. Die Hälfte von 90 konnte sowohl durch die Malreihen als auch durch das Zerlegen eines Zehners in zwei Fünfer begründet gefunden werden:

„F: Weil ich erstens die Neunerreihe kann, und weil 40 plus 40 ist 80. ... Plus zwei Fünfer. Also 45 plus 45 ist dann halt noch 10 plus, also 80 plus 10 ist 90.“²³⁸

Der Rechenweg zur Ermittlung der Hälfte von 500 wurde von Kind F wie folgt erklärt:

„F: Weil 200 plus 200 ist 40, plus, plus 50 plus 50 ist 100, ... ist halt 200 plus 200 ist 40 plus 100 ist 50.“²³⁹

Diese Sprechweisen sind schwer zu interpretieren, auch weil Kind F auf weiteres Nachfragen im Zuge des Interviews keine klareren Antworten gab. Aus den

²³⁵ vgl. GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 81 f.

²³⁶ vgl. GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 273

²³⁷ vgl. GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 273

²³⁸ Transkript Kind F, Z 465-467

²³⁹ Transkript Kind F, Z 479

Begründungen kann deshalb nicht eindeutig analysiert werden, inwiefern der Aspekt des Entbündelns von Kind F bewusst oder vorrangig prozedural durchgeführt wurde.

5.3.6.3 Kategorie 2: Einsicht in das Stellenwertprinzip

Aufgabe	2	3 / 4	5	6.3
Skalenniveau	S1	S1	S1	S1

Tabelle 26: Kind F- Einsicht in das Stellenwertprinzip

Beim Lösen der Aufgaben in Bezug auf das Stellenwertprinzip erreichte Kind F durchwegs ein hohes Skalenniveau. Der Wert der Ziffer 4 in 246 wurde unter anderem durch das additive Prinzip²⁴⁰ erläutert:

„F: Das (zeigt auf die Zehnerstelle von 246) ist halt die Vierzig. Also (zeigt auf die Hunderterstelle von 246) .. das ist halt Zweihundert plus Vierzig (zeigt auf die Zehnerstelle von 246) plus 6 ...“²⁴¹

Die größte Zahl konnte strukturiert durch Beurteilen der Ziffern vom größten zum kleinsten Stellenwert gefunden werden. Die Begründung erfolgte vorrangig auf der prozeduralen Ebene:

(Aufgabe 305 und 299 vergleichen)

„I: Und das, obwohl da (zeigt auf die Zehnerstelle von 299) eine Neun steht und da (zeigt auf die Zehnerstelle von 305) steht eine Null?“

F: Das (zeigt abwechselnd auf die Hunderterstellen) ist mehr (sehr bestimmt). Als erstes muss ich immer die Hunderter, und wenn die gleich sind, dann schau ich auf den Nuller. Wenn das gleich wäre, dann würde dann das (zeigt auf 299) das Höhere sein. Aber das ist es halt nicht.“²⁴²

Zahlen, deren Stellen durch Ziffern und den Stellenwerten entsprechende Buchstaben gegeben waren, konnte Kind F problemlos in Ziffernfolgen übersetzen. Seinen Fehler bei der ersten Aufgabe, bei der die Stellen nicht in absteigender Reihenfolge von links nach rechts gegeben waren, konnte das Kind im Zuge der Erklärung selbstständig korrigieren. Die Rolle der Ziffer Null sowie die Auswirkungen des Weglassens derselben sind Kind F bewusst:

„I: Und könnt ich die Null (zeigt auf die Einerstelle von 620) nicht einfach weglassen?“

F: Nein, dann wär es falsch. ... Weil dann müsste da (zeigt auf 6H) Zehner stehen und da (zeigt auf 2Z) Einer.“²⁴³

²⁴⁰ vgl. SCHERER & MOSER OPITZ 2010, S. 133

²⁴¹ Transkript Kind F, Z 24-25

²⁴² Transkript Kind F, Z 58-62

²⁴³ Transkript Kind F, Z 94-97

(Aufgabe 3E 5H = 503) „F: Das ist genauso wie das mit dem (zeigt auf die vorige Aufgabe). Weil das Hundert ist (zeigt auf 5H) und das Einer (zeigt auf 3E), .. und das kann ja nicht sein, ... dass da (zeigt auf die Zehnerstelle in 503) jetzt keine Zahl dazwischen ist. Kann ja nicht 53 sein. Es muss ja 500 sein (zeigt auf die Hunderterstelle von 503).“²⁴⁴

Den Ziffern einer Zahl kann Kind F Teilmengen aus gebündelten Zahldarstellungen richtig zuordnen. Dabei wird der Ziffernwert korrekt mit dem Stellenwert zusammengedacht:

(Zehnerstelle von 53 zuordnen) „F: Die 5? Das sind sozusagen, das sind nicht sozusagen, das könnten entweder die 5 Gläser sein (zeigt auf die 5 Gläser), oder die 50 Steine.“²⁴⁵

Kind F hat bereits ein fundiertes Verständnis für die Ziffernschreibweise von Zahlen aufgebaut. Die Reihenfolge, in der die Stellenwerte aufgeschrieben werden, ist ebenso wie die Rolle der Null verinnerlicht. Auch können Zahlen der Größe nach geordnet werden.²⁴⁶ Inwiefern dieses Vorgehen aber auf konzeptuelles Wissen über Zehner und Einer gestützt ist, darüber kann keine fundiert begründete Aussage gemacht werden.

5.3.6.4 Kategorie 3: Beziehung Ziffernfolge - Zahlwort

Unterkategorie	Ziffernfolge => Zahlwort	Zahlwort => Ziffernfolge
Skalenniveau	S1	S2 i

Tabelle 27: Kind F - Beziehung Ziffernfolge - Zahlwort

Bei der Übersetzung von Ziffernfolgen in Zahlwörter konnten während des gesamten Gesprächs keine Schwierigkeiten beobachtet werden. Bei der Auffassung gesprochener Zahlwörter traten aber insofern Unsicherheiten auf, als 357 auch nach Wiederholung als 375 umgesetzt wurde. Abgesehen davon schrieb Kind F gehörte zweistellige Zahlwörter invers auf. Wenn diese innerhalb einer dreistelligen Zahl vorkamen, konnte eine deutliche Verzögerung nach der Hunderterstelle beobachtet werden.

5.3.6.5 Zusammenfassung

Die Analyse ergab, dass Kind F noch gewisse Defizite im Bereich des Stellenwertverständnisses aufweist. Besonders bei der Einsicht in das

²⁴⁴ Transkript Kind F, Z 101-103

²⁴⁵ Transkript Kind F, Z 256-257

²⁴⁶ vgl. SCHERER & MOSER OPITZ 2010, S. 133

Bündelungsprinzip waren Unsicherheiten erkennbar. So konnte eine Anzahl einzelner Elemente nur schwer gebündelt werden, um die Menge enthaltener Zehner festzustellen. Auch wurde das Zählen in Zehnerschritten nicht mit dem Verändern der Anzahl um zehn Einheiten bzw. um einen Zehner konzeptuell verbunden. Stattdessen war der Fokus oft auf eine Fünferbündelung gerichtet. Bei der Anwendung der Stellenwertprinzipien zum raschen Lösen von Aufgaben zeigten sich ebenfalls Unsicherheiten. Beispiele, die das Entbündeln forderten, konnten zwar gelöst werden, es konnte aber durch die Begründungen nicht belegt werden, ob dabei vorrangig prozedurales oder konzeptuelles Wissen angewendet wurde. In Bezug auf das Stellenwertprinzip waren Hinweise gegeben, dass Kind F bereits prozedurales Wissen darüber aufgebaut hat. Inwiefern dieses auch konzeptuell begründet war, konnte nicht klar analysiert werden. Ziffernfolgen kann Kind F in Zahlwörter übersetzen, beim Schreiben von gesprochenen Zahlwörtern in Ziffernschreibweise treten aber Unsicherheiten auf. Diese stehen in Zusammenhang mit der Gewohnheit des Kindes, die Einerziffer zeitlich vor der Zehnerziffer zu schreiben.

5.4 Vergleichende Interpretation der Einzelinterviews

In diesem Abschnitt werden die unter 5.3 dargestellten Ergebnisse vergleichend interpretiert. Dazu werden die Kinder A, B und C als nach dem Urteil der Lehrperson „leistungsstark“, die Kinder D, E und F als nach dem Urteil der Lehrperson „leistungsschwach“ zu Gruppen zusammengefasst und Gemeinsamkeiten sowie Differenzen zwischen diesen in Bezug auf Verständnis der bereits oben genannten Teilbereiche Bündelungsprinzip, Stellenwertprinzip und Beziehung zwischen Ziffernfolge und Zahlwort herausgefiltert. Im Zuge dessen wird auf die zweite Forschungsfrage eingegangen, inwiefern in Bezug auf das Stellenwertverständnis Unterschiede auftreten zwischen Schülerinnen und Schülern, die in Mathematik gemäß dem Urteil ihrer Lehrkraft „leistungsschwach“ sind, und solchen, die gemäß dem Urteil ihrer Lehrkraft „leistungsstark“ sind.

5.4.1 Kategorie 1a: Einsicht in das Bündelungsprinzip – Schwerpunkt Bündeln

	leistungsstark			leistungsschwach		
Aufgabe	Kind A	Kind B	Kind C	Kind D	Kind E	Kind F
5	S1a	S1a	S1b	S2	S3	S1a
6.1 / 6.3	S1	S1	S1	S1	S3	S1
6.2 / 6.3	S1	S1	S2	S1	S2	S3
7	S1	S1	S1	S1	S1	S1
8	S1	S1	S1	S1	S1	S1

Tabelle 28: Erreichte Skalenniveaus im Bereich "Einsicht in das Bündelungsprinzip - Schwerpunkt Bündeln"

Innerhalb der beiden Gruppen wurde in diesem Teilbereich kein gleichartiges Verständnis für das Stellenwertsystem aufgebaut. Bei den nach dem Urteil der Lehrperson leistungsstarken Kindern gab es zwei Schülerinnen und Schüler, die bei allen Aufgaben durchwegs das höchste Skalenniveau erreichten. Dennoch konnte nur bei Kind A begründet von einem tragfähigen Stellenwertsystem ausgegangen werden, das auch beim Lösen von Aufgaben eingesetzt werden konnte.²⁴⁷ Kind B löste zwar alle Aufgaben richtig, inwiefern dies aber gestützt auf prozedurales oder konzeptuelles Wissen passierte, konnte nicht klar definiert werden.²⁴⁸ Kind C erreichte zwar bei zwei Aufgaben nicht das höchste Skalenniveau, dennoch konnte von einem durchaus fundierten Stellenwertverständnis ausgegangen werden. Nur in der Anwendung des Wissens blieb offen, ob dies vermehrt prozedural oder aufbauend auf Verständnis passierte.²⁴⁹

Durch die dargestellten Ergebnisse ist deutlich erkennbar, dass die Skalierung zwar zur Struktur und Übersicht beiträgt, aber dennoch keinen wesentlichen Erkenntnisgewinn über das entwickelte Stellenwertverständnis der Kinder bringt. Die erreichten Skalenniveaus dieser Kategorie sagen zwar etwas über das prozedurale Wissen aus, das die Kinder bereits aufgebaut haben, inwiefern diesem aber

²⁴⁷ vgl. Kapitel 5.3.1.1

²⁴⁸ vgl. Kapitel 5.3.2.1

²⁴⁹ vgl. Kapitel 5.3.3.1

Konzepte zugrunde liegen, kann aus den in Tabelle 28 dargestellten Ergebnissen nicht herausgelesen werden.

Bei den nach dem Urteil der Lehrperson leistungsschwachen Kindern kann bereits durch die erreichten Skalenniveaus ein deutlicher Unterschied zwischen Kind D und den Kindern E und F erkannt werden. Kind D musste zwar vereinzelt auf Materialhandlungen zurückgreifen, diese führte es aber basierend auf Verständnis des Bündelungsprinzips aus. In Bezug auf die Anwendung dieses Wissens auf symbolischer Ebene konnte allerdings nicht genau analysiert werden, ob dies vorrangig prozedural oder basierend auf konzeptuellem Wissen geschah.²⁵⁰ Kind E und Kind F zeigten beide große Schwierigkeiten beim Lösen einzelner Aufgaben, woraus auf vorhandene Defizite bei der Einsicht in das Bündelungsprinzip geschlossen werden konnte.²⁵¹

Vergleichend ist zwischen den beiden Gruppen zu sagen, dass nur zwei der leistungsschwachen Kinder in dieser Kategorie das niedrigste Skalenniveau erreichten. Bei den leistungsstarken Kindern war dieses nicht vertreten. Von einem durchwegs tragfähigem Stellenwertverständnis kann allerdings nur bei einem der leistungsstarken Kinder ausgegangen werden.

5.4.2 Kategorie 1b: Einsicht in das Bündelungsprinzip – Schwerpunkt Entbündeln

Aufgabe	leistungsstark			leistungsschwach		
	Kind A	Kind B	Kind C	Kind D	Kind E	Kind F
9	-	-	-	-	-	-
10	S1a	S1a	S1a	S1a	S1a	S1a
11	S1a	S1a	S1a	S1b	S2	S1a

Tabelle 29: Erreichte Skalenniveaus im Bereich "Einsicht in das Bündelungsprinzip - Schwerpunkt Entbündeln"

In diesem Bereich fällt auf, dass durchwegs alle Kinder einen Hunderteuroschein problemlos entbündeln konnten. Daraus könnte geschlossen werden, dass Aufgaben mit Lebensbezug, wie von der Lehrperson dargestellt, im Unterricht mehrfach bearbeitet wurden und deshalb keine Herausforderung darstellten. Bei der Gruppe der leistungsstarken Kinder traten auch beim Entbündeln auf symbolischer Ebene

²⁵⁰ vgl. Kapitel 5.3.4.1

²⁵¹ vgl. Kapitel 5.3.5.1 bzw. 5.3.6.1

keine Schwierigkeiten auf. Dennoch konnte aufgrund der Begründungen nur bei Kind A mit hoher Sicherheit auf ein fundiertes Stellenwertverständnis geschlossen werden.²⁵² Bei Kind B und Kind C blieb offen, ob sie sich bei der Lösung der Aufgabe des Entbündelns bewusst waren, oder ob dies eher auf einer vorrangig prozeduralen Ebene durchgeführt wurde.²⁵³

Bei der Gruppe der leistungsschwachen Kinder wurden im Gegensatz zu den leistungsstarken Kindern durchwegs unterschiedliche Skalenniveaus erreicht. Kind D zeigte auf enaktiver Ebene bereits aufgebautes Verständnis für das Entbündeln.²⁵⁴ Im Gegensatz dazu konnte bei Kind E auch bei der Arbeit mit Material keine fundierte Einsicht in den Vorgang des Entbündelns erkannt werden.²⁵⁵ Bei Kind F blieb offen, ob es seine durchwegs richtigen Lösungen vorrangig prozedural oder aufbauend auf tragfähige Konzepte ermittelt hat.²⁵⁶

Wie in Kategorie 1a zeigen diese Ergebnisse abermals deutlich, dass die erreichten Skalenniveaus nicht unmittelbar mit dem aufgebauten konzeptuellen Wissen in Bezug auf das Entbündeln in Verbindung gebracht werden können.

Beim Rückwärtszählen in Zehnerschritten hatten alle Kinder Schwierigkeiten. Bei den leistungsstarken Kindern wiesen die Probleme aber vorwiegend auf einen Mangel an sprachlichen Fertigkeiten bzw. auf Übungsmangel hin. Bei den leistungsschwachen Kindern kann hingegen durchwegs vermutet werden, dass auch mangelnde Einsicht in das Bündelungsprinzip dazu beigetragen hatte.²⁵⁷

²⁵² vgl. Kapitel 5.3.1.2

²⁵³ vgl. Kapitel 5.3.2.2 bzw. 5.3.3.2

²⁵⁴ vgl. Kapitel 5.3.4.2

²⁵⁵ vgl. Kapitel 5.3.5.2

²⁵⁶ vgl. Kapitel 5.3.6.2

²⁵⁷ vgl. Kapitel 5.3.1.2, 5.3.2.2, 5.3.3.2, 5.3.4.2, 5.3.5.2 und 5.3.6.2

5.4.3 Kategorie 2: Einsicht in das Stellenwertprinzip

Aufgabe	leistungsstark			leistungsschwach		
	Kind A	Kind B	Kind C	Kind D	Kind E	Kind F
2	S1	S1	S1	S2	S2	S1
3 / 4	S1	S1	S1	S1	S2	S1
5	S1	S2	S1	S2	S2	S1
6.3	S1	S1	S1	S1	S1	S1

Tabelle 30: Erreichte Skalenniveaus im Bereich "Einsicht in das Stellenwertprinzip"

Bei dieser Kategorie wurde vorwiegend prozedurales Wissen über Zahlen, die als Ziffernfolgen notiert waren, abgefragt. Dabei traten bei keiner Gruppe große Defizite auf. Allerdings wird deutlich, dass zwei der leistungsschwachen Kinder im Gegensatz zu den leistungsstarken eine Reihe von Unsicherheiten zeigten.²⁵⁸ Kind F konnte zwar alle Aufgaben sicher lösen, ob dies aber gestützt auf Verständnis passierte, konnte nicht klar erkannt werden.²⁵⁹

Die leistungsstarken Kinder zeigten hingegen durchwegs Sicherheit bei der Anwendung des prozeduralen Wissens über das Stellenwertprinzip. Bei Kind A und Kind B waren dabei auch zugrundeliegende Konzepte über Hunderter, Zehner und Einer erkennbar.²⁶⁰ Dass Kind B hier nur Skalenniveau 2 erreichte, lag an einem Fehler, der vermutlich jedoch nicht als Hinweis auf mangelndes Verständnis interpretiert werden darf.

In dieser Kategorie zeigen durchwegs hohe erreichte Skalenniveaus gesichertes vorwiegend prozedurales Wissen im Bereich des Positionsprinzips. Inwiefern diesem Wissen aber konzeptuelles Verständnis über die Einheiten zugrunde liegt, kann aus den in Tabelle 30 dargestellten Ergebnissen nicht unmittelbar herausgelesen werden.

²⁵⁸ vgl. Kapitel 5.3.4.3 und 5.3.5.3

²⁵⁹ vgl. Kapitel 5.3.6.3

²⁶⁰ vgl. Kapitel 5.3.1.3 und 5.3.2.3

5.4.4 Kategorie 3: Beziehung zwischen Ziffernfolge und Zahlwort

	leistungsstark			leistungsschwach		
Kategorie	Kind A	Kind B	Kind C	Kind D	Kind E	Kind F
Ziffernfolge => Zahlwort	S1	S1	S1	S2	S1	S1
Zahlwort => Ziffernfolge	S1	S1	S1 i	S2	S1	S2 i

Tabelle 31: Erreichte Skalenniveaus im Bereich "Beziehung Ziffernfolge - Zahlwort"

In diesem Bereich ist der Unterschied zwischen den erreichten Skalenniveaus der leistungsstarken und den Skalierungen von zwei der drei leistungsschwachen Kinder deutlich erkennbar.

Die Kinder A und B zeigten sowohl beim Übersetzen von Ziffernfolgen in Zahlwörter als auch beim umgekehrten Vorgang keine Unsicherheiten.²⁶¹ Dies war auch bei Kind C der Fall, obwohl es gehörte Zahlwörter invers aufschrieb.²⁶²

Bei den leistungsschwachen Kindern konnte hingegen nur Kind E die Aufgaben ohne Schwierigkeiten lösen.²⁶³ Kind D zeigte in beiden Kategorien vermehrt Unsicherheiten.²⁶⁴ Kind F konnte zwar Ziffernfolgen das richtige Zahlwort zuordnen, beim Notieren gesprochener Zahlwörter zeigten sich aber Unsicherheiten, wobei auch invers geschrieben wurde.²⁶⁵

Diese Kategorie ist die einzige der vier vorgestellten, in der die erreichten Skalenniveaus die Qualität des aufgebauten (konzeptuellen) Wissens in diesem Teilbereich widerspiegeln, da bei allen Kindern die erreichten Niveaus dem bereits entwickelten Verständnis entsprechen. In diesem Fall ist der Versuch gelungen, das Wissen durch eine Zuordnung auf einer Skala strukturiert abzubilden.

²⁶¹ vgl. Kapitel 5.3.1.4 und 5.3.2.4

²⁶² vgl. Kapitel 5.3.3.4

²⁶³ vgl. Kapitel 5.3.5.4

²⁶⁴ vgl. Kapitel 5.3.4.4

²⁶⁵ vgl. Kapitel 5.3.6.4

5.5 Ausgewählte Kritikpunkte an der Durchführung der empirischen Untersuchung

Nach SELTER und SPIEGEL²⁶⁶ kann nie absolute Gewissheit darüber erlangt werden, wie Kinder beim Lösen von Aufgaben denken. Selbst wenn sich die Interviewerin um eine objektive Analyse des Verlaufs bemühe, werden Beobachtungen im Zuge des Interviews dennoch immer basierend auf Vorstellungen analysiert, die über das Denken der Kinder aufgebaut wurden. Dabei würden Fehlinterpretationen oft erst im Laufe der genauen Analyse ans Tageslicht kommen. Auch könne nicht gänzlich ausgeschlossen werden, dass sich das Kind daran orientiert, welche Antworten möglicherweise von ihm erwartet werden. Um ein Interview sicher und gewinnbringend zu führen, sei außerdem oft langes und intensives Training notwendig.

Diese Schwierigkeiten wurden im Zuge der Auswertung der Interviews deutlich. Oft konnte auf Grundlage der Videos keine fundierte Aussage darüber gemacht werden, welches Wissen die Kinder zur Lösung der jeweiligen Aufgabe angewendet hatten. An mancher Stelle wäre es auch notwendig gewesen, noch einmal anders bzw. gezielter nachzufragen, um deutlich zwischen vorwiegend prozeduralem oder vermehrt konzeptuellem Wissen zu unterscheiden. Diese Schwierigkeiten sind durchaus auf mangelnde Erfahrung seitens der Interviewerin zurückzuführen. Auch sollte zum Beispiel beim schriftgestützten Zählen erst nach dem Notieren aller Zahlen um eine Übersetzung in die Zahlwörter gebeten werden, da durch sprachliche Begleitung des Schreibens der Ziffern oft Verzögerungen auftraten, die sonst möglicherweise vermieden werden hätten können.

Da alle Kinder beim verbalen Rückwärtszählen in Zehnerschritten Schwierigkeiten zeigten, kann vermutet werden, dass derartige Aufgaben im Unterricht zumindest nicht regelmäßig behandelt wurden. Der gesicherte Aufbau der sprachlichen Kompetenz wäre aber notwendig gewesen, um durch diese Aufgabe möglicherweise Schwierigkeiten beim Entbündeln im Zuge der Hunderterunterschreitung herausfiltern zu können.²⁶⁷ Dies hätte vorab im Laufe des Interviews mit der Lehrperson abgeklärt werden sollen.

Die Analyseform der skalierenden Strukturierung brachte einen deutlichen Gewinn an Überschaubarkeit der Ergebnisse. Da aufgebautes Wissen aber sehr vielfältig sein kann, konnten nicht für alle Aufgaben entsprechende Skalenniveaus spezifiziert

²⁶⁶ 1997, S. 105

²⁶⁷ vgl. Kapitel 4.5.2.2

werden, die die Form des angewendeten Wissens hinreichend klar definieren. Darauf musste deshalb im Zuge der individuellen Auswertung der Kinder eingegangen werden. Abgesehen davon spiegelten die Skalenniveaus nur in einer Kategorie unmittelbar die Qualität des bereits aufgebauten (konzeptuellen) Wissens wieder. Bei allen anderen Bereichen zeigte ein hohes erreichtes Skalenniveau nicht zwingend an, dass im Zuge der Lösung der Aufgabe konzeptuelles Wissen erkennbar war. Bei einer Studie dieses Ausmaßes können die Ergebnisse zwar vermutlich dennoch von der Leserin oder dem Leser erfasst werden, bei einer größeren Untersuchung würde diese Art der Auswertung aber wahrscheinlich zu unübersichtlich werden.

5.6 Resümee

Im Zuge der Auswertung der Interviews mit den Kindern wurde deutlich, wie schwierig es ist, Gewissheit über die Denkweise und das aufgebaute Verständnis der Kinder zu erlangen. Deshalb konnte nicht bei jedem Kind in allen Teilbereichen eine fundiert begründete Aussage über die Art der gewonnenen Einsicht in das Stellenwertsystem gemacht werden. Besonders schwierig war herauszufiltern, ob das erkennbare prozedurale Wissen aufbauend auf vorhandene Konzepte angewendet wurde, oder ob das Abhandeln von Prozeduren zur richtigen Lösung führte. Bezeichnend dafür ist auch, dass die erreichten Skalenniveaus in drei der vier Kategorien nicht unmittelbar mit der Qualität des bereits entwickelten Verständnisses für das Stellenwertsystem in Verbindung gebracht werden konnten.

Festgestellt werden konnte, dass alle Schülerinnen und Schüler bereits erste Einsichten in die Prinzipien des Dezimalsystems gewonnen haben, wobei das Niveau aber durchwegs sehr unterschiedlich war. Kind A ist das einzige Kind, das in allen Bereichen bereits ein tragfähiges Verständnis für das Dezimalsystem entwickelt hat und dies auch im Zuge seiner Begründungen verdeutlicht. Bei Kind B kann nur über das bereits aufgebaute prozedurale Wissen im Bereich des Positionsprinzips beziehungsweise der Beziehung zwischen Ziffer und Zahlwort eine fundierte Aussage gemacht werden. In den anderen Bereichen konnte nicht herausgefiltert werden, inwiefern den richtigen Lösungen bereits klare und tragfähige Konzepte zugrunde lagen. Kind C schreibt zwar invers, zeigt dabei aber keine Unsicherheiten. Wie bei Kind B war es auch hier schwierig zu erkennen, ob das prozedurale Wissen auf tragfähigen Konzepten aufbaut. Kind D zeigte in allen Bereichen auf der symbolischen Ebene Schwierigkeiten, materialgestützt war aber konzeptuelles Wissen erkennbar. Deshalb kann aber nicht schon von einem tragfähigen Stellenwertverständnis ausgegangen werden, da es dafür notwendig ist, die verschiedenen dezimalen Einheiten unabhängig von Material konzeptuell

miteinander zu verbinden. Dieses abstrakte Wissen sollte außerdem gezielt beim Rechnen und Problemlösen eingesetzt werden können. Kind F zeigte bereits aufgebautes prozedurales Wissen über das Positionsprinzip. Im Bereich des Bündelungsprinzips waren aber große Defizite erkennbar. Auch bereitete das Schreiben gehörter Zahlwörter Schwierigkeiten, die durch die inverse Schreibweise verstärkt wurden. Kind E zeigte in allen Bereichen mit Ausnahme der Beziehung zwischen Ziffernfolge und Zahlwort mitunter große Schwierigkeiten, was darauf schließen lässt, dass noch kein gesichertes Stellenwertverständnis entwickelt wurde.

Bei der vergleichenden Analyse der nach dem Urteil der Lehrperson leistungsstarken (Kinder A, B und C) und leistungsschwachen (Kinder D, E und F) Kinder zeigte sich, dass die Beurteilung der Lehrperson in vielen Bereichen durchaus den Ergebnissen der Untersuchung entsprach. Zwar konnte nicht bei allen leistungsstarken Kindern herausgefiltert werden, ob den bereits gefestigten Prozeduren auch Konzepte über Hunderter, Zehner und Einer zugrunde liegen, dennoch zeigte diese Gruppe deutlich weniger Schwierigkeiten als die leistungsschwachen Kinder. Teilweise gab es aber auch Diskrepanzen zwischen dem Urteil der Lehrperson und den Ergebnissen der Untersuchung, da die leistungsschwachen Kinder nicht in allen Kategorien Probleme beim Lösen der Aufgaben hatten. So zeigte zum Beispiel Kind F im Bereich des prozeduralen Wissens über das Positionsprinzip keine Schwierigkeiten, Kind E hat in der Kategorie „Beziehung zwischen Ziffernfolgen und Zahlwort“ bereits konzeptuelles Wissen aufgebaut.

In Bezug auf die Unterrichtsprinzipien der Lehrperson ist hervorzuheben, dass keines der Kinder Probleme beim Lösen von Aufgaben aus der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler zeigte. Daraus kann geschlossen werden, dass der von der Lehrperson erwähnte Schwerpunkt, so oft wie möglich einen Bezug zum Alltag der Kinder herzustellen, erfolgreich umgesetzt wurde.

6 Zusammenfassung

Das dezimale Stellenwertsystem ist in Bezug auf die Menschheitsgeschichte eine sehr junge, für den Fortschritt der Menschheit freilich maßgebliche Erfindung. Selbst große Zahlen können im Dezimalsystem mittels weniger Ziffern dargestellt und Rechenoperationen vereinfacht durchgeführt werden, wodurch die Mathematik für eine breitere Bevölkerung zugänglich gemacht wurde. Grundlage dafür sind das Prinzip der fortgesetzten Bündelung sowie das Positionsprinzip, wodurch einer Ziffer neben dem Ziffernwert auch ein Stellenwert zugeordnet wird, dessen Größe von der Position innerhalb der Ziffernfolge abhängig ist. Unterschieden werden muss zwischen Ziffernschreibweise und gesprochenen Zahlwörtern, wobei das Herstellen dieser Beziehung in der deutschen Sprache durch die Inversion bei der Zahlwortbildung für zweistellige Zahlen für Lernende eine besondere Herausforderung darstellt.

Mathematisches Wissen kann nach unterschiedlichen Gesichtspunkten kategorisiert werden. Gemeinsam haben unterschiedliche in der Literatur vorfindliche Definitionen aber, dass der Erkenntnisgewinn bzw. die Entwicklung von Verständnis nicht unmittelbar beobachtet werden kann, wie ja auch die Gegenstände der Mathematik nicht sinnlich wahrnehmbar sind. Wesentlich ist, dass Beziehungen (Konzepte) hergestellt werden, Abhandeln von Prozeduren losgelöst ohne Anbindung an tragfähige Konzepte vermieden und die Verbindung zur Lebenswelt der Kinder geschaffen wird. Der Wissenserwerb wird in der fachdidaktischen Literatur der letzten Jahrzehnte als konstruktiver Prozess verstanden. Dieser sollte durch ganzheitliches Lernen auf unterschiedlichen Repräsentationsebenen (enaktiv, symbolisch, ikonisch) unterstützt werden. Dabei sind ein stetiger Transfer zwischen den Darstellungsformen sowie das Versprachlichen der Handlung wichtig, wodurch auch überprüft werden kann, inwiefern Grundvorstellungen aufgebaut wurden.

Um das dezimale Stellenwertsystem verstehen zu können, müssen neue Zahlvorstellungen in bereits vorhandene Konzepte integriert werden. Zahlen sollten als Mengen aus Einzelelementen, aber auch als Zusammensetzungen aus verschiedenen dezimalen Einheiten verstanden werden. Diese Zahlvorstellungen müssen außerdem mit der Ziffernschreibweise und der Zahlwortbildung in Verbindung gebracht werden. Schwierigkeiten, die während dieses Lernprozesses auftreten können, sollten der Lehrperson ebenso wie die Vor- und Nachteile des Einsatzes unterschiedlicher Erarbeitungsmaterialien bewusst sein.

Um Einblicke in die Denkprozesse und das bereits aufgebaute Verständnis der Kinder zu bekommen, sind halbstandardisierte Einzelinterviews nach der revidierten

klinischen Methode die effizienteste Form der Befragung. Durch einen vorgegebenen Kernfragenkatalog werden die Ergebnisse vergleichbar, die ergänzenden Fragen können allerdings individuell auf die jeweilige Situation bzw. das Kind angepasst werden. Handlungen mit Materialien können dabei die Veranschaulichung des Denkweges unterstützen. Dennoch ist es sehr schwierig, Gewissheit über das aufgebaute Verständnis der Kinder zu erlangen.

Die Auswertung mittels inhaltlicher Strukturierung nach einem Kategorienschema und anschließender Zuordnung der Lösungen zu unterschiedlichen Skalenniveaus trägt zwar zur Übersichtlichkeit bei, dennoch ist nicht bei allen Aufgaben eine genaue Definition dieser Niveaus möglich. Abgesehen davon kann aus dem Erreichen eines Skalenniveaus nicht unmittelbar darauf geschlossen werden, dass nicht nur prozedurales, sondern auch konzeptuelles Wissen angewendet wurde. Es muss deshalb letztlich doch jeweils individuell analysiert und dargestellt werden, ob und inwiefern die Äußerungen und beobachteten Handlungen der Kinder Hinweise auch auf deren konzeptuelles Wissen liefern.

Das Verständnis, das die im Rahmen dieser Bachelorarbeit befragten Kinder am Beginn der vierten Schulstufe für das Dezimalsystem entwickelt haben, scheint von durchwegs unterschiedlicher Qualität zu sein, wobei diese nicht bei allen Kindern mit Gewissheit ermittelt werden konnte. Nur ein nach dem Urteil der Lehrperson leistungsstarkes Kind zeigte durch seine Lösungen und Erläuterungen, dass es bereits hohe (konzeptuelle) Einsicht in die Prinzipien des Dezimalsystems gewonnen hat und diese auch beim Lösen von Aufgaben anwenden kann. Bei zwei weiteren gemäß dem Urteil der Lehrkraft leistungsstarken Kindern war zwar in vielen Bereichen gefestigtes prozedurales Wissen erkennbar, inwiefern dieses aber aufbauend auf Konzepte angewendet wurde, konnte nicht eindeutig analysiert werden. Die übrigen drei Kinder, alle nach dem Urteil der Lehrperson leistungsschwach, zeigten in vielen Bereichen Schwierigkeiten, woraus auf Defizite im Verständnis des Dezimalsystems geschlossen werden konnte. Bei Aufgaben, die auch eine Lösung auf rein prozeduraler Ebene zuließen, traten bei diesen drei Kindern weniger Probleme auf, als wenn konzeptuelles Wissen angewendet werden musste.

Unterschiede waren zwischen den gemäß dem Urteil der Lehrperson „leistungsstarken“ und „leistungsschwachen“ Kindern insofern erkennbar, als bei der Gruppe der leistungsstarken Schülerinnen und Schüler deutlich weniger Schwierigkeiten beim Lösen der Aufgaben auftraten. Demnach entsprach die Einteilung der Lehrperson im Großen und Ganzen dem Ergebnis der Analyse. Hervorzuheben ist allerdings, dass bei Aufgaben mit Bezug zur Lebenswelt der

Schülerinnen und Schüler bei keinem der Kinder Probleme auftraten. Dies kann vielleicht als Zeichen dafür gewertet werden, dass das Herstellen von Beziehungen zwischen informellem und formellem Wissen im Mathematikunterricht der Kinder einen hohen Stellenwert hatte, wie es auch die Lehrperson für ihren Unterricht postulierte.

Zusammenfassend ist zu sagen, dass das genaue Analysieren des aktuellen Verständnisses der Kinder für die weitere Förderung essentiell ist. Die Lehrperson wird dadurch aber, wie bereits dargestellt, vor eine große Herausforderung gestellt, da es selbst bei großem Bemühen sehr schwierig ist, genaue Aussagen über den Wissensstand der Kinder zu tätigen. Erfahrung und Übung im Befragen der Kinder spielen dabei eine große Rolle. Jedenfalls sollte diese spannende Aufgabe im Schulalltag dennoch ernst und wahrgenommen sowie regelmäßig umgesetzt werden.

7 Literaturverzeichnis

7.1 Literaturen in Papierform

- BENZ, Christiane (2005): *Erfolgsquoten, Rechenmethoden, Lösungswege und Fehler bei Schülerinnen und Schülern bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 100*. Hildesheim: Franzbecker.
- BORTZ, Jürgen, DÖRING, Nicola (2006): *Forschungsmethoden und Evaluation für Human- und Sozialwissenschaftler* (4., überarbeitete Auflage). Heidelberg: Springer Medizin Verlag.
- DAMEROW, Peter, SIEGBERT, Schmidt (2004): Arithmetik im historischen Prozess: Wie „natürlich“ sind die „natürlichen Zahlen“?. In: Gerhard N. MÜLLER, Heinz STEINBRING, Erich Ch. WITTMANN (Hrsg.): *Arithmetik als Prozess* (S. 133-182). Seelze: Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung GmbH.
- GAIDOSCHIK, Michael (2003a): Rechenstörungen: Die „didaktogene Komponente“. Kritische Thesen zur „herkömmlichen Unterrichtspraxis“ in drei Kernbereichen der Grundschulmathematik. In: Frederike LENART, Norbert HOLZER, Hubert SCHAUPP (Hrsg.): *Rechenschwäche – Rechenstörung – Dyskalkulie: Erkennung, Prävention, Förderung* (S. 182-153). Graz: Leykam Buchverlagsges.m.b.H.
- GAIDOSCHIK, Michael (2003b): Zehner und Einer: Die ersten Schritte. In: Frederike LENART, Norbert HOLZER, Hubert SCHAUPP (Hrsg.): *Rechenschwäche – Rechenstörung – Dyskalkulie: Erkennung, Prävention, Förderung* (S. 182-153). Graz: Leykam Buchverlagsges.m.b.H.
- GAIDOSCHIK, Michael (2007): *Rechenschwäche vorbeugen. Das Handbuch für LehrerInnen und Eltern. 1.Schuljahr: Vom Zählen zum Rechnen*. Wien: G&G Verlagsgesellschaft mbH.
- GAIDOSCHIK, Michael (2009): Kein „Zahlenraum“ ohne Stellenwertdenken. *Grundschule Mathematik*, 20, 12-15.
- GAIDOSCHIK, Michael (2011): *Rechenschwäche – Dyskalkulie. Eine unterrichtspraktische Einführung für LehrerInnen und Eltern* (6. Auflage). Wien: öbv-hpt.

- GERRITZEN, Lothar (Hrsg.) (2008): Warum wir Zahlen von hinten nach vorne lesen und warum das nicht so bleiben muss. In: Lothar GERRITZEN (Hrsg.), Manfred HAUENSCHILD, Paul KIMMESKAMP, Jürgen VOIGT: *Zwanzigeins. Für die unverdrehte Zahlensprechweise. Fakten, Argumente, Meinungen* (S. 22-33). Bochum: Universitätsverlag Dr. N. Brockmeyer.
- GRAY, Edward M. (1991): An Analysis of Diverging Approaches to Simple Arithmetic: Preference and its Consequences. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 551-574.
- HOFHERR, Esther (2002): *Römische Zahlen – Mathematikstunde. Unterrichtsentwurf*. Norderstedt: GRIN Verlag.
- HUCKLE, Thomas, SCHNEIDER, Stefan (2006): *Numerische Methoden*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.
- IFRAH, Georges (1991): *Universalgeschichte der Zahlen* (Sonderausgabe, 2. Auflage). Frankfurt am Main: Campus-Verlag.
- JACOB, Walter (2008): Sachstand, Probleme, Lösungen. In: Lothar GERRITZEN (Hrsg.), Manfred HAUENSCHILD, Paul KIMMESKAMP, Jürgen VOIGT: *Zwanzigeins. Für die unverdrehte Zahlensprechweise. Fakten, Argumente, Meinungen* (S. 34-37). Bochum: Universitätsverlag Dr. N. Brockmeyer.
- KLÖCKENER, Josef (1990): Schreibrichtungsinversion beim Schreiben zweistelliger Zahlen – Eine Untersuchung über Ursachen und Abhilfen. *Mathematische Unterrichtspraxis*, 11, III. Quartal, S. 15–30.
- KRAUTHAUSEN, Günter, SCHERER, Petra (2007): *Einführung in die Mathematikdidaktik* (3. Auflage). München: Elsevier GmbH.
- KÜHNEL, Johannes (1959): *Neubau des Rechenunterrichts*. Düsseldorf: Turm-Verlag.
- LAUTER, Josef (1991): *Fundament der Grundschulmathematik. Pädagogisch-didaktische Aspekte des Mathematikunterrichts in der Grundschule*. Donauwörth: Ludwig Auer GmbH.
- MAYRING, Philipp (2010): *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken* (11., aktualisierte und überarbeitete Auflage). Weinheim und Basel: Beltz Verlag.
- PADBERG, Friedhelm, BENZ, Christiane (2011): *Didaktik der Arithmetik* (4., erweiterte, stark überarbeitete Auflage). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

- SCHERER, Petra, MOSER OPITZ, Elisabeth (2010): *Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- SCHERER, Petra, STEINBRING, Heinz (2004): Übergang vom halbschriftlichen Rechenstrategien zu schriftlichen Algorithmen – Addition im Tausenderraum. In: Petra SCHERER, Dagmar BÖNIG (Hrsg.): *Mathematik für Kinder- Mathematik von Kindern* (S. 163-173). Frankfurt am Main: Grundschulverband - Arbeitskreis Grundschule e.V.
- SCHIPPER, Wilhelm (2003): Lernen mit Material im arithmetischen Anfangsunterricht. In: Monika BAUM, Hans WIELPÜTZ (Hrsg.): *Mathematik in der Grundschule. Ein Arbeitsbuch* (S. 221-237). Seelze: Kallmeyer.
- SCHIPPER, Wilhelm (2009): *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Braunschweig: Westermann Schroedel.
- SELTNER, Christoph, SPIEGEL, Hartmut (1997): *Wie Kinder rechnen*. Düsseldorf: Klett-Grundschulverlag.
- WITTMANN, Erich Ch., MÜLLER, Gerhard N. (1994): *Handbuch produktiver Rechenübungen 2. Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen*. Stuttgart: Ernst Klett Schulbuchverlag GmbH.
- WITTMANN, Erich Ch., MÜLLER, Gerhard N. (2011): *Das Zahlenbuch 3*. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.

7.2 Literaturen in elektronischer Form

- GERRITZEN, Lothar (2009): *Zwanzigeins statt einundzwanzig – Zur Geschichte und Didaktik der verdrehten Zahlsprechweise*. Beitrag zum Mathematikunterricht 2009. Mathematik Universität Dortmund. URL: http://www.mathematik.tu-dortmund.de/ieem/cms/media/BzMU/BzMU2009/Beitraege/GERRITZEN_Lothar_2009_Zwanzigeins.pdf [14.10.2013].
- GERSTER, Hans-Dieter, SCHULTZ, Rita (2004): *Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht*. Freiburg: Pädagogische Hochschule, Institut für Mathematik und Informatik und ihre Didaktiken. URL: <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:bsz:frei129-opus-161> [18.06.2012].

- LORENZ, Jens Holger (2011): Die Macht der Materialien (?) Anschauungsmittel und Zahlenrepräsentationen [Elektronische Version]. *Mathematikdidaktik Grundschule, 1 (Medien und Materialien – Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2011)* S. 39-54 Bamberg: University of Bamberg Press.
- MACK, Nancy K. (1990): *Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge*. [Elektronische Version] Journal for Research in Mathematics Education, 21 (1), S. 16-32.
- RETZ, Werner (2003): *Beobachtung des Lösungswegs beim Rechnen in der Grundschule* (2. überarbeitete Auflage). [Elektronische Version] Hamburg: Behörde für Bildung und Sport, Amt für Bildung.
- VOLKSSCHULLEHRPLAN (2012): URL: http://www.bmukk.gv.at/medienpool/14055/lp_vs_gesamt.pdf [14.10.2013].
- WARTHA, Sebastian, SCHULZ, Axel (2011): *Aufbau von Grundvorstellungen (nicht nur) bei besonderen Schwierigkeiten im Rechnen*. [Elektronische Version] Kiel: Universität Kiel, IPN Leibniz-Institut für Pädagogik d. Naturwissenschaften.
- WINTER, Heinrich (2001): *Inhalte mathematischen Lernens*. Bildungsserver Rheinland-Pfalz. URL: http://grundschule.bildung-rp.de/fileadmin/user_upload/grundschule.bildung-rp.de/Downloads/Mathematik/Winter_Inhalte_math_Lernens.pdf [14.10.2013].

8 Anhang

- 8.1 Interview mit der Lehrperson
- 8.2 Interview mit Kind A
- 8.3 Interview mit Kind B
- 8.4 Interview mit Kind C
- 8.5 Interview mit Kind D
- 8.6 Interview mit Kind E
- 8.7 Interview mit Kind F
- 8.8 Im Zuge der Interviews verwendete Arbeitsblätter
 - Preisliste für Fahrräder
 - Arbeitsblatt AB 3
 - Zahlenstrahl

8.1 Interview mit der Lehrperson

Die erwähnten Namen der Kinder wurden durch die in der Arbeit entsprechend verwendeten Buchstaben ersetzt. Ebenso wurden geschlechterspezifische Formulierungen abgeändert.

I: Seit wie vielen Jahren sind Sie bereits klassenführende Lehrperson Ihrer Klasse?

L: Ich bin seit 1999 im Schuldienst, seit 2000 führe ich Klassen also ist das mein dreizehntes Jahr.

I: Und diese Klasse haben Sie seit der ersten?

L: Diese habe ich seit der Ersten. Also wir sind da drei Jahre und ein bisschen unterwegs.

I: Ok, gut. Mit welchem Schulbuch arbeiteten Sie während der ersten drei Schuljahre im Fach Mathematik?

L: Äh, die zweite und dritte Klasse war Zahlenreise und die erste (*überlegt*), ich glaube das war, das war ein ganzer Jahrgang Zahlenreise, ja.

I: Und wie würden Sie dieses Schulbuch didaktisch beurteilen?

L: Genügend Übungsgelegenheit für mechanisches Rechnen. Mathematik in dem Sinn, ja auch, und man bemüht sich auch ein bisschen, äh, Denkprozesse in Gang zu bringen, aber da gibt es sicher bessere Literatur.

I: Ok. Sie verwenden jetzt ein anderes Schulbuch?

L: Wir sind jetzt beim „Alles klar“.

I: Welche Bedeutung hat Ihrer Meinung nach die Einsicht in das dezimale Stellenwertsystem für das mathematische Verständnis der Kinder?

L: Das ist ein grundlegendes Element, ähm, im Zahlenaufbau für, für die Kinder. Egal ob es jetzt im Zahlenraum 10 sich abspielt, oder dann mit den Zehnern auf den Hunderter, je nachdem welchen Stellenwert oder welche Stelle wir weiter bearbeiten. Ja, ein ganz ganz essenzielles, äh, Tool, um Mathematik zu verstehen.

I: Und in welcher Weise haben Sie das während der vergangenen Jahre umgesetzt im Unterricht?

L: Äh, viel Begreifen. Äh, im, im Zehner konkret haben wir, äh, mehr oder weniger alles zuerst einmal versucht handelnd zu erfassen, äh, und dann den Übertrag in, in symbolische, äh, Elemente zu schaffen. Äh, und mit jeder Stelle, die dazugekommen ist, haben wir das einfach wieder kombiniert. Dann zuerst die, die ganzen Zehner auf den Hunderter. Auch da wieder versucht mit, mit allen möglichen Zehnerelementen aus dem Erfahrungsraum der Kinder anzufangen. Egal ob es die zehn Eier in der Schachtel, die sie da haben, äh, sind, oder, äh, eine Tafel Schokolade mit gerade halt zehn Stück, äh, oder, oder, oder. Äh, und dann wieder ergänzt. Und beim, beim Tausender ging's, ging's deto. Äh, parallel dazu als, äh, erstes mathematisches Mittel mit der Rechenschachtel, die Einerwürfel und Zehnerstangen. Äh, mit, mit dem Hunderter ging's dann, ginge es weiter mit der Platte und mit dem Tausenderwürfel. Äh, solche Elemente haben wir schon durchaus eingebaut, um dann zunehmend abstrakter zu werden und, äh, aus, aus den, äh, aus den konkreten Gegenständen in die, in die mathematischen Prozesse einzusteigen.

I: Sie haben jetzt eh schon einige Materialien genannt. In welcher Art haben Sie die im Unterricht eingesetzt? Hatten Sie die zum Beispiel in Klassenstärke vorhanden oder haben Sie es als Anschauungsmaterial verwendet?

L: Äh, die Rechenschachtel, die war, zuerst die, die blaue mit den großen Würfeln, hatten alle Kinder in der Bank in der ersten Klasse. Und, äh, in der zweiten hatten wir dann die rote. Und die hatte ich auch teilweise so für Einzelfragen auch noch in der dritten Klasse, äh, im Einsatz. Das war für jedes Kind handhabbar. Das war auch wichtig, immer wieder die Dinge legen zu lassen. Äh, und das hat sich dann ausdifferenziert. Manche Kinder haben das ganz lange gebraucht. Äh, Sie kennen **Kind E**. Und wir haben, äh, andere Kinder, die, denen war's schon relativ am Anfang der zweiten Klasse nicht mehr wichtig, weil sie das Zahlensystem schon verstanden haben bis Einhundert. Da war das Legen und das, äh, von Stangen und Würfeln nicht mehr, nicht mehr so bedeutsam, obwohl es auch da, äh, für Überschreitungen oder Unterschreitungen genauso wieder wertvoll war, um es zu tauschen. Äh, Spielgeld, zweiter, ein zweiter Bereich, den wir bei allen Kindern hatten. Äh, veranschaulicht haben wir es viel auf dem, auf dem White Board. Äh, und, und nach Möglichkeit auch, äh, einzelnes Anschauungsmaterial dazu, aber da war es mir schon wichtig, dass alle Kinder das Material in der Hand hatten.

I: Können Sie mir da eine konkrete Übung sagen, die Sie zum Beispiel mit der gesamten Klasse gemacht haben, wo jeder mit Material etwas gearbeitet hat?

L: Ja, Stellenwertsystem, zum Beispiel den, den Hunderter, oder innerhalb des Zahlenraums Einhundert, äh, die, die Zehnerstangen legen, Einerwürfel dazu, damit ich zählen kann, wenn ich eine Addition aufbaue. So viele Zehner habe ich hier plus so viele Zehner ergeben so viele. Dann habe ich so und so viele Würfel im zweiten Summanden und noch einmal so viele Würfel und das ergibt gesamt so viel Würfel. Ergo insgesamt die Summe der Zehnerstangen, insgesamt die Summe der Einerwürfel ergibt mir, ich weiß nicht, acht Zehner vier Einerwürfel, sind vierundachtzig. Also wirklich auch Zahlen gleich dem Stellenwert her aufzusplitten und, und dann konkret zu legen und zu addieren oder auch wegzunehmen. Äh, und dann zu sehen, was kommt dabei heraus. Wobei das Addieren insgesamt anschaulicher zu sein scheint für mich, weil ich da konkret zwei Teile habe, die ich dann zusammenlegen kann. Beim, beim Subtrahieren, und so schreib ich es ja dann auch auf. Beim Subtrahieren nehme ich von einem kompletten Set etwas weg und muss das, was ich weglege, äh, ich kann's nicht einfach zur Seite legen. Ich kann das auch zur Seite legen, um dann zu sehen, was, was bleibt vorne übrig, aber das Ergebnis dann aufzuschreiben, das war für mich nicht so stimmig wie die Addition. Und da haben wir es wirklich exzessiv eingesetzt, in allen Zahlenbereichen. Also von 30 auf Einhundert rauf, oder zuerst auf 50, äh, und dann mit und ohne Überschreitung. Äh, auch dieses Umtauschen. Ich habe jetzt mehr Einerwürfel. Jetzt nehme ich zehn, leg die auf eine Zehnerstange drauf, tausche um, geb mir eine Zehnerstange dazu. Oder ich hab zu wenig Einerwürfel, also muss ich mir eine, eine im Gegenwert von zehn Einerwürfel umtauschen und dann kann ich die Unterschreitung machen.

I: Und für den Zahlenraum Tausend, hatten Sie Hunderterplatten zur Verfügung?

L: Nein, die war, die waren dann, äh, nur mehr bildhaft ikonisch auf dem White Board zur Verfügung.

I: Haben Sie noch andere Materialien, also Sie haben ja schon Rechengeld genannt. Wie haben Sie das im Unterricht eingesetzt?

L: Äh, immer wieder bei konkreten Situationen, äh, genauso wie, wenn wir an Stelle der Rechenwürfel mit dem Rechengeld gearbeitet haben. Da, da haben die Kinder dann schlicht und einfach die, äh, die Zehner und, und Ein-Euro-Münzen herausgelegt, um mit, mit der Währung zu agieren.

I: Und eine Aufgabe oder ein Beispiel, ein konkretes, wie die Angabe für die Kinder ausgesehen hat, wenn sie alle mit

Rechengeld gearbeitet haben?

L: Ein Kaufmannsladen mit, ich weiß nicht, fünf, sechs verschiedenen Gegenständen: ein Heft, ein Bleistift, irgendwas im Erfahrungsbereich der Kinder, mit einem, äh, mit einem vergleichbaren Preis. Äh, konnte auch dann später andere Dinge sein. Ich weiß nicht, äh, wenn man, wenn man jetzt in den Hunderter mit Euros hineinrechnet, da braucht man dann einfach andere Produkte, die auch dem Preis irgendwo entsprechen: ein Buch, ein, eine CD, äh, eine Tasche, Schuhe, Kleidung, egal. Und das dann drinnen und, äh, zum Beispiel Aufgabenstellung: Ich habe vierzig Euro. Zwei Dinge darf ich mir aussuchen. Was kann ich mir kaufen? Was bleibt übrig? Oder, ähm, es ist, das war auch durchaus in der Zahlenreise teilweise drin, ähm, so ein Laden abgebildet, und dann konkrete, äh, Aufträge. Äh, ich weiß nicht: Peter kauft sich einen Apfel und eine Zitrone. Kostet. Wie viel gibt er aus? Was bleibt ihm übrig? Äh, Anna hat einen zwanzig Euroschein und möchte ein Buch kaufen und eine CD. Geht sich das aus?

I: Also das waren jetzt mehr Sachaufgaben. Und jetzt eher nur solche Aufgaben, dass Sie es verwenden, um unterstützend Aufgaben zu lösen eher theoretischer Art?

L: Ja, durchaus auch. Äh, Serienrechnungen im, in dem Buch. Ähm, „Wo stehen wir?“, kam die Frage sozusagen bei einer Schülerin. „Na nimm es heraus. Leg es dir, dann siehst du es.“ Gerade auch in der zweiten Klasse zur, zur Unterstützung, wo im Stellenwertsystem stehe ich denn gerade? Ich hab die Hundertertafel, die aufbaut, ja. Und unsere hat wirklich von 0 bis, oder von 1 bis 10 unten begonnen und hat sich nach oben in das Hunderterhaus erstreckt. Weil manche Hundertertafeln ja oben beginnen und unten beim Hunderter aufhören. Aber wo ist jetzt die Zahl, die herauskommt? In Richtung Vorbeugen eines Zahlensturzes, oder, oder wenn der häufiger vorkommt: „Kann die Zahl stimmen?“ Auch dieses Unterstützen: „Stell dir vor, wo ungefähr musst du denn herauskommen?“ Bis hin zum überschlagenden Rechnen: „Was für ein Zehnerbereich wird's denn ungefähr werden? Und stell dir vor, da musst du hin. Kann dein Ergebnis stimmen?“ Und wenn ich dann ein paar Einer überprüfe ist das leichter, als wenn, wenn ich mit meiner Zahl um dreißig danebenliege, nur weil ich keine Vorstellung vom Zahlenraum hab.

I: Das heißt, Sie haben schon erwähnt, Hundertertafel haben Sie auch eingesetzt?

L: Ja, die haben wir eingesetzt. Die hatten wir relativ lange, die ganze zweite Klasse im Einsatz. Äh, und da ging's um's Zahlen zuordnen, um Nachbarn horizontal und vertikal zu suchen, also Zehner- und Einernachbarn, um, äh, um verschiedene Suchaufgaben zu lösen, äh, um ganz konkrete Zahlen zu suchen, um, äh, dann auch hinzugehen und es sich noch einmal anzuschauen, um dieses Vorstellen zu unterstützen.

I: Also eher in Richtung Orientierung im Zahlenraum.

L: Ja, Orientierung im Zahlenraum, ja.

I: Stellenwerttafel? Haben Sie die ...?

L: Die haben wir immer wieder verwendet, ja. Äh, die haben wir verwendet, äh, im, äh, im Erarbeiten des Hundertersystems, ganz klar. Äh, wenn ich den Zehner habe, dann muss ich da weitertun. Und, äh, als wir dann in den Tausender gingen, ging's nicht nur ums Verstehen der konkreten Zahlen, sondern auch darum, äh, die Zahlen dann zu zerlegen in ihre Einzelheiten, in ihre Stellen. Und da haben wir die Tabelle wieder gehabt. Und wir werden sie jetzt, wenn wir von Eintausend weiterrechnen, äh, wieder einpacken, weil wir dann den Tausender, äh, als neue Stelle einführen. Äh, und wir haben ganz lange großen Wert auf die farbliche Kennzeichnung der Stellen gelegt. Manche Kinder machen das heute noch aus Gewohnheit weiter.

I: Andere Materialien, die sie noch verwendet haben, die speziell für das Stellenwertverständnis wichtig sind? Oder die Sie dafür eingesetzt haben, für die Arbeit daran?

L: Nein, das waren im Wesentlichen die.

I: Eine Frage noch zum Zahlenraumaufbau: Wie hat das ausgesehen, also welche Grenzen haben Sie sich da gesetzt beim Aufbau des Zahlenraums im Laufe der drei Jahre?

L: Ich bin in diesem Durchgang relativ traditionell marschiert. Also Zahlen bis 5, die haben wir in einem gemacht, auch wenn sie, äh, wochenweise aufgebaut waren. Äh, Zahlen bis 10 habe ich, habe ich bis 7 dann, also Zahlenraum 7 quasi, mir dann noch extra genommen. Und, ich glaube, dann bin ich bis 10 durchmarschiert. Äh, die nächste Grenze war 30, dann kurz 50 und dann 100. Und dann von 100 den Schritt auf 1000. Und da stehen wir im Moment.

I: Gut. Für meine Forschungsarbeit benötige ich drei nach Ihrem Urteil in Mathematik leistungsstarke und drei nach Ihrem Urteil in Mathematik leistungsschwache Kinder. Nennen Sie mir zuerst drei leistungsstarke Kinder, nach Ihrem Urteil, bitte.

L: **Kind A**, **Kind X**. Und unter den *Kindern* würde ich, würde ich unterscheiden zwischen, äh, einem ganz ganz tollen *Kind*, das Gesetzmäßigkeiten herauslesen kann, und das ist **Kind C**. Das kann aus, aus gegebenen Umständen hervorragend, äh, abstrahieren. Äh, eines, das immer fleißig ist und alles kann, wäre auch **Kind Z**, das könnte ich auch empfehlen.

I: Also Sie müssen sich, Sie müssen drei auswählen, die Sie mir für meine Arbeit empfehlen.

L: Das ist natürlich eine Falle weil nicht gendgerech.

I: Also drei Schülerinnen und Schüler. Es sind sechs Kinder insgesamt.

L: Ich weiß, ja. (*lacht*)

I: Aber ich mache es ja nicht geschlechterspezifisch.

L: Ich weiß, aber das kann natürlich immer wieder auch dann mitschwingen und, ähm. (*überlegt lange*)

I: Also ich mach keine Differenzierung zwischen Mädchen und Buben.

L: Ja, ja. (*überlegt*) Würde ich trotzdem sagen, **Kind A**, **Kind X** und **Kind C**.

I: Nach welchen Kriterien haben Sie jetzt zum Beispiel **Kind A** ausgewählt?

L: Äh, die Fähigkeit, wie bei **Kind C**, eigene Gesetzmäßigkeiten, oder Gesetzmäßigkeiten zu erkennen, Zahlenraumverständnis, äh, Rechengeschwindigkeit.

I: Und **Kind X**, was zeichnet dieses Kind als leistungsstark aus?

L: **Kind X** ist, äh. Ach Gott, da fällt mir ein, Entschuldigung, **Kind B** habe ich Ihnen vorenthalten. Das nehmen wir.

I: Statt **Kind X**?

L: **Kind B** ist irrsinnig schnell, hat ein Zahlenverständnis, hat ein Verständnis für Operationen, und auch für das Abstrahieren. Jetzt wird es dann schwierig. Wenn ich unter diesen fünf drei aussuchen müsste, wär **Kind C** trotzdem interessant, weil es Gesetzmäßigkeiten in Worte fassen kann, **Kind B** von der Rechengeschwindigkeit und (*überlegt*) **Kind A**, ja, aufgrund seiner, seiner Fähigkeit zu abstrahieren, seiner Arbeitsgeschwindigkeit, ja. Wobei ich mir ganz schwer tue, aus diesen fünf drei auszusuchen, weil die wirklich vorne losmarschieren.

I: Das ist halt für meine Bachelorarbeit leider begrenzt, dass ich nicht ...

L: Ja. Als Ersatz würde ich statt **Kind A** **Kind X** empfehlen, falls wir da auch hinsichtlich der, der Erlaubnis eine Schwierigkeit

- haben.
- I: Was würde Kind X auszeichnen?**
- L: Äh, hohe rasche Auffassungsgabe, äh, Fähigkeit zu abstrahieren und, äh, ja, die Arbeitsgeschwindigkeit, die, die Rechenprozesse, die bei *diesem Kind* im Kopf ablaufen, sind schon sehr schnell.
- I: Welche Noten hatten die Schülerinnen und Schüler?**
- L: Durchwegs Sehr gut.
- I: Durchwegs Sehr gut, mhm. Jetzt bräuchte ich dann noch drei nach Ihrem Urteil leistungsschwache Kinder in Mathematik.**
- L: **Kind E.** Es hat Schwierigkeiten in der Zahlauffassung, also Zuordnung auch im Zahlenraum. Äh, Ein-mal-Eins sehr, war lange sehr beschaulich, ähm, ja. Das zweite Kind, **Kind D**, das sich mit sehr viel Fleiß immer wieder weiterhantelt, aber seine Zeit braucht, um Dinge zu verstehen. Hm, wen könnte ich Ihnen sonst noch sagen? (*überlegt lange*) Am ehesten **Kind F**. Das ist nämlich sehr bequem. Ich glaube, es wüsste mehr, aber manchmal habe ich den Eindruck, es genügt sich auch, oder es gibt sich auch mit weniger zufrieden.
- I: Zu den einzelnen Kinder: Gibt es Bereiche in der Mathematik, wo Sie aber sagen, das können sie gut?**
- L: Äh, **Kind E** hat sich im, im Ein-mal-Eins gesteigert und sobald es, äh, und sobald es vertikal addieren oder subtrahieren kann, geht es diesem Kind relativ gut, weil es den Zahlenraum 10 gesichert und 20, meines Erachtens, äh, ausreichend gefestigt hat.
- I: Mit vertikal Rechnen meinen Sie schriftlich?**
- L: Schriftlich Addieren und Subtrahieren. Was aber die Querverbindung zum, äh, zur Zahlvorstellung im Raum noch nicht sichert. Aber es hat dann halt eine Zahl sich ausgerechnet. Das kann es gut, mechanisch rechnen.
- I: Und sonst Bereich? Also zum Beispiel auch in Richtung Geometrie? Gibt es irgendetwas, wo Sie sagen, da ist dieses Kind gut, also nicht nur in der Arithmetik?**
- L: Ja, ja. Also in der Geometrie wäre es mir weder besonders nach oben, noch nach unten aufgefallen. Also das ist soweit klar für *dieses Kind*, ja. Bei **Kind D** würde ich sagen geometrisch, äh, gesichert, gefestigt, äh, Ein-mal-Eins auch, aber das Umsetzen von Sachsituationen in mathematische Prozesse ist, glaube ich, bei *diesem Kind* schon auch ein Thema. Diese: „Was muss ich da jetzt machen?“
- I: Das bereitet diesem Kind Schwierigkeiten?**
- L: Das bereitet *diesem Kind* meines Erachtens Schwierigkeiten.
- I: Und bei Kind F. Gibt es da etwas, das es gut kann?**
- L: **Kind F** ist in Geometrie gut. **Kind F** kann auch, wenn es, wenn's *dem Kind* gerade Spaß macht, kann es in Prinzip alle Dinge recht gut, aber es ist, es mag dieses, oder mochte dieses, äh, dieses Trainieren, dieses, äh, routinemäßige, ich würde fast böser Weise sagen, dringhafte Festigen von Ein-mal-Eins, zum Beispiel, das hat *diesem Kind* nicht Spaß gemacht. Additive Rechenformen sind für *dieses Kind* kein Problem. Da tut es sich leichter.
- I: Welche Schulnoten hatten diese drei Schülerinnen und Schüler im Jahreszeugnis?**
- L: **Kind E** und **Kind F** hatten beide ein Gut, **Kind E** ganz sicher. **Kind D** hat sich mit viel Fleiß, äh, ich glaube es hatte sogar ein Sehr gut. Da hat einfach viel mitgespielt, auch das, was Kinder an Einsatz mitbringen.
- I: Gut. Das war es soweit. Danke vielmals.**
- L: Gerne.

8.2 Interview mit Kind A

Interview Nr. 4
Kind A
Datum: 26.09.2012
Beginn: 09:50:39
Ende: 10:08:44
Dauer: 00:18:05

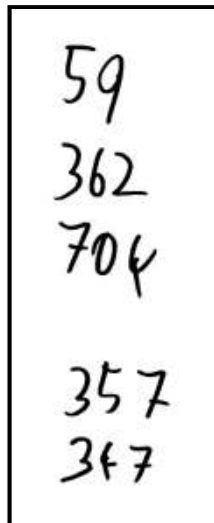
- 1 I: Das Wichtigste heute ist: Ähm, ich werde dir bei den ganzen Fragen, die ich dir da stelle, jetzt nicht sagen, ob es
2 richtig oder falsch ist, ja?
3 A: Ja.
4 I: Sondern ich werde dich immer fragen, wie du das gemacht hast, oder wie du das gerechnet hast, oder wie du da
5 drauf gekommen bist. Das ist das, was mich heute interessiert.
6 A: Gut.
7 I: Ja, ich mag wissen, wie du denkst.
8 A: Mhm.
9 I: Schauen wir einmal, ob wir das herausfinden. Die erste Aufgabe ist: Ich sage dir jetzt drei Zahlen an und du schreibst
10 die Zahlen einfach da untereinander auf den Zettel. Du darfst ruhig groß schreiben, dass ich das gut lesen kann,
11 ok?
12 A: Ja.
13 I: Also. 59.
14 A: (schreibt 59 in der Reihenfolge ZE)
15 I: Ok. 362.
16 A: (schreibt 362 in der Reihenfolge HZE)
17 I: Du bist ein Schnellschreiber. Und 704.
18 A: (schreibt 704 in der Reihenfolge HZE)
19 I: Ok. Das war erste schwierige Aufgabe.
20 A: (lacht)
21 I: Die zweite Aufgabe: (legt ein Ziffernkärtchen mit 246 auf den Tisch) Kannst du mir die Zahl bitte vorlesen.
22 A: 246 (antwortet prompt).
23 I: Ok. Und was bedeutet der Vierer da? (zeigt auf die Ziffer 4)
24 A: 40. Die vier Zehner.
25 I: Ok, gut. Ich sehe schon, wir werden schnell fertig.
26 A: (lacht)
27 I: Ähm, die nächste Frage. Den Stift darfst du einstweilen auf die Seite legen, den brauchen wir erst nachher wieder.
28 (legt Preisliste auf den Tisch) Das ist eine Preisliste von Fahrrädern.
29 A: Mhm.
30 I: Kannst du mir sagen, welches das teuerste Fahrrad ist?
31 A: (überlegt) Ähm. (überlegt) Eigentlich gibt's zw.. (spricht sehr langsam), ah, das. (zeigt auf das teuerste Fahrrad)
32 I: Und wie bist du darauf jetzt gekommen?
33 A: Naja (lacht), ich habe ein bisschen herumexperimentiert. Hab mir die Sechshunderter herausgeholt und dann habe ich
34 gedacht, die sind beide, die sind beide gleich. Und dann habe ich gesehen, dass da ein Fünfer ist. Ist verwirrend. Alles die
35 gleichen Zahlen aber in, in verschiedenen Reihenfolgen.
36 I: Mhm, ich muss euch ja fordern.
37 A: (lacht)
38 I: Und warum ist jetzt das, wenn der Fünfer hier steht (zeigt auf 653) dann – wieso sagst du, ist das höher, als wenn der
39 Fünfer da hinten steht?
40 A: Weil es 6 Hunderter sind, genau wie da (zeigt abwechselnd auf 635 und 653), aber halt es sind statt dreißig Zehnern (zeigt
41 auf 635) fünfzig Zehner (zeigt auf 653).
42 I: Mhm. Fünfzig Zehner?
43 A: Ja.
44 I: Mhm, ok. (räumt die Preisliste weg)
45 A: Ich meine 5 Zehner. (lacht, ärgert sich)
46 I: Ja. Du brauchst dich gar nicht so beeilen.
47 I: (legt Ziffernkärtchen 299 und 305 auf den Tisch) Kannst du mir die zwei Zahlen bitte vorlesen.
48 A: 305 und 299.
49 I: Und welche ist mehr wert? Welche ist mehr?
50 A: 305.
51 I: Und wieso weißt du das so schnell?
52 A: Ähm, weil es 6 mehr sind.
53 I: 6 mehr?
54 A: (zeigt auf 305) Da sind zwar 0 Zehner dabei und (zeigt auf 299) da sind 9, aber (zeigt auf 305) es sind mehr Hunderter.
55 I: Ok. Gut erklärt (legt Ziffernkärtchen 52 und 25 auf den Tisch). Kannst du mir die zwei Zahlen bitte auch vorlesen?
56 A: 52 und 25.
57 I: Und welche ist da mehr wert?

- 58 A: Die 52.
 59 **I: Und woher weißt du das so schnell?**
 60 A: (*zeigt auf 52*) Weil es 5 Zehner sind und nicht 2 (*zeigt auf 25*).
 61 **I: Gut. Ich sehe schon, wir müssen zu etwas anderem übergehen (*räumt Ziffernkärtchen weg; legt AB 3 auf den Tisch*).
 62 Kennst du die Symbole?**
 63 A: Ja.
 64 **I: Weißt du was die Zahlen, die Buchstaben bedeuten?**
 65 A: Ja. Dreihun ...
 66 **I: Was bedeutet (*zeigt auf die erste Aufgabe*) ...**
 67 A: Das H bedeutet Hundert, das Z bedeutet Zehner und das E bedeutet Einer.
 68 **I: Super. Jetzt nimmst du dir den dicken Stift, ähm, und ich möchte jetzt, dass du bitte immer die Zahlen, die das (*zeigt*
 69 *auf die erste Aufgabe*) bedeutet, daneben hinschreibst und mir dann auch laut vorliest, wenn du es hingeschrieben**
 70 **hast. Ok?**
 71 A: Mhm.
 72 **I: Und ich frage dich vielleicht zwischendurch wieder, wie du das gemacht hast.**
 73 A: (*löst Aufgabe 3H 4Z 5E = 345*) 345.
 74 **I: Mhm.**
 75 A: (*löst Aufgabe 3Z 2E 7H = 327*) 327.
 76 **I: Mhm. Wie bist du darauf gekommen?**
 77 A: Ich denk mir einfach die (*zeigt auf die Buchstaben*) – (*lacht verlegen*) ach. Ok. Ähm, da oben denk ich mir immer die Zehner
 78 und die Buchstaben weg.
 79 **I: Mhm.**
 80 A: Das passiert mir auch bei den Hausaufgaben, dass ich manchmal nicht genau darauf achte (*zeigt auf die zweite Aufgabe;*
 81 *lacht verlegen*).
 82 **I: Du darfst es auch ...**
 83 A: Ja. (*möchte zur nächsten Aufgabe übergehen*)
 84 **I: Das heißt, das heißt, das (*zeigt auf die zweite Aufgabe*) sind 327.**
 85 A: (*lacht*) Nein, das ist nicht 327. (*lacht verlegen*)
 86 **I: Du kannst es auch – also wenn du nicht sicher bist – du kannst es auch durchstreichen und etwas anderes**
 87 **hinschreiben.**
 88 A: Gut.
 89 **I: Weil du jetzt zuerst so unsicher warst.**
 90 A: Mhm. (*streicht 327 durch; schreibt 732*)
 91 **I: Ok, und wie bist du darauf jetzt gekommen?**
 92 A: Ähm, (*zeigt auf die Aufgabe*) ich habe jetzt die Buchstaben dazu genommen. Das geht nämlich nur, wenn man die – das
 93 Buchstabenwegzählen geht nämlich nur, wenn man, wenn die in der richtigen Reihenfolge sind. Also Hunderter, Zehner und
 94 Einer, wenn die in der richtigen Reihenfolge sind.
 95 **I: Ok. Mhm.**
 96 A: (*löst Aufgabe 6H 2Z = 620*)
 97 **I: Ok. Was bedeutet die Null da? (*zeigt auf 620*)**
 98 A: Der Nuller? Das bedeutet, dass da kein Einer mehr dazu ist. Da stehen 6 Hunderter und 2 Zehner. Und wenn da jetzt kein
 99 Nuller dazu ist, dann schreibt man da einen automatisch dazu, weil sonst würde das 62 sein.
 100 **I: Mhm, ok.**
 101 A: (*löst Aufgabe 3E 5H = 503*)
 102 **I: Und was bedeutet die Null da jetzt?**
 103 A: Dann würden es, ähm, nur 53 sein, weil dann hätte der Hunderter keine Bedeutung mehr, also muss immer an der richtigen
 104 Stelle ein Nuller sein.
 105 **I: Mhm. Und was heißt der Nuller jetzt da in der Zahl (*zeigt auf 503*)? Was bedeutet das?**
 106 A: 0 Zehner.
 107 **I: Mhm. Ok.**
 108 A: (*überlegt bei Aufgabe 4Z 12E etwas länger; schreibt 4; streicht 4 durch; schreibt 52*)
 109 **I: Mhm. Wie bist du darauf jetzt gekommen?**
 110 A: Weil, weil es maximal nur geht, dass es neun Einer sind. Und wenn man dann schon 10 Einer dazu gezählt hat, dann ist
 111 dann schon der nächste Zehner. Und da sind jetzt 12 und deswegen hat man den nächsten Zehner und 2 Einer dazu
 112 gezählt.
 113 **I: Ok, super. Das hast du toll erklärt.**
 114 A: (*löst Aufgabe 2H 13Z 4E = 334 zügig*)
 115 **I: Wie hast du das da jetzt herausgefunden?**
 116 A: Weil da ist das Gleiche nur mit Hundertern – wie vorher.
 117 **I: Mhm. Super, gut. Danke schön. Dann habe ich jetzt noch etwas mitgebracht (*holt einen Kübel mit Steinen*). Wir**
 118 **machen jetzt etwas anderes. Den Stift kannst du auf die Seite legen (*leer den Kübel aus*). Und zwar habe ich hier**
 119 **Steine und Gläser (*stellt 8 Gläser auf den Tisch*).**
 120 A: Mhm.
 121 **I: Und ich möchte – und da helfe ich dir jetzt dabei, dass wir in jedes Glas 10 Steine einfüllen. Ok?**
 122 A: Mhm.
 123 **I: Und wo wir schon 10 eingefüllt haben, die stellen wir dann da auf die Seite, gut?**
 124 A: Ja. Zwei, vier, sechs, acht, zehn (*schiebt Steine zur Seite; füllt diese 10 Steine in ein Glas; zählt die übrigen Steine ohne*
 125 *verbale Begleitung in Zweierschritten*).
 126 **I: Sehr gut. Da haben wir jetzt die Gläser. Kannst du mir sagen, wie viele Steine das sind (*zeigt auf alle Gläser*)? Die**
 127 **übrigen können wir jetzt liegen lassen.**
 128 A: Insgesamt (*zeigt auf die Gläser*)?
 129 **I: Genau, wie viele Steine das sind (*zeigt auf die Gläser*).**
 130 A: Zwei, vier, sechs, achtzig (*steckt jeweils Daumen und Zeigefinger in je ein Glas*).

- 131 **I: 80. Ok, gut. Und, ähm (schiebt Gläser und übrigen Steine für das Kind erreichbar zur Seite), jetzt geben wir die Gläser**
 132 **und die Steine zu dir hinüber.**
- 133 **A:** Mhm. Und aufteilen (nimmt übrige Steine in die Hand).
- 134 **I: Nein, jetzt möchte ich, dass du mir bitte 25 Steine da herlegst (zeigt auf den freien Platz am Tisch).**
- 135 **A:** Aus den Gläsern, oder?
- 136 **I: Du kannst verwenden, was du möchtest.**
- 137 **A:** Gut (nimmt 2 Gläser und leert die Steine auf den Tisch; zählt 5 Steine von den übrigen ungebündelten dazu).
- 138 **I: Ok, gut. Kannst du mir auch 25 da so hergeben, dass ich das gleich erkennen kann, wenn ich vorbeigehe, dass das**
 139 **25 sind?**
- 140 **A:** Ähm, ja (schiebt die 25 Steine zur Seite; zählt von den übrigen Steinen 25 in Zweierschritten weg und ordnet diese in 5
 141 Spalten zu je 5 Steinen an; zählt die Spalten abschließend nach).
- 142 **I: Ok. Jemand anderer hat sich einmal gedacht, er legt die 25 so her (nimmt 2 Gläser und legt 5 Steine dazu). Wieso**
 143 **weiß er, dass das 25 sind?**
- 144 **A:** Weil in jedem Glas 2, ich meine 10 drinnen sind, und zusammen sind es 20, und dann halt noch 5 Steine dazu, also sind es
 145 25.
- 146 **I: Ok. Und welche Darstellung von 25 gefällt dir jetzt am besten (zeigt auf die 3 Mengen: 25 ungeordnet; 25 in 5 Spalten**
 147 **zu je 5 Steinen; 2 Gläser und 5 Steine)?**
- 148 **A:** (überlegt)
- 149 **I: Oder welche ist jetzt am ...**
- 150 **A:** Die (zeigt auf die 2 Gläser), weil es ist ja auch gescheit, dass man 2 Gläser nimmt. Nein, eigentlich die (zeigt auf 5 Spalten zu
 151 je 5 Steinen), weil da (zeigt auf die Gläser) erkennt man nicht gleich, dass es 10 Steine sind.
- 152 **I: Genau. Also da müsste man wissen, dass es 10 Steine sind.**
- 153 **A:** Ja.
- 154 **I: Und wenn man weiß, dass es 10 sind?**
- 155 **A:** Wenn man weiß, dass es 10 sind, dann würd die (zeigt auf die 2 Gläser) die beste sein.
- 156 **I: Ok, gut. Kannst du in die (zeigt auf die zwei leeren Gläser) bitte wieder jeweils 10 hinein füllen, in die Gläser?**
- 157 **A:** Ja (zählt 2, 4, 6, 8, 10 laut).
- 158 **I: Ok (schiebt alle Gläser und Steine zur Seite), jetzt lege ich eine Menge (schiebt 5 Gläser und 3 Steine zur Seite). Wie**
 159 **viele Steine sind das jetzt?**
- 160 **A:** 53.
- 161 **I: Mhm. Wie hast du es gezählt? Oder, kannst du es mir laut vorzählen, wie du das gemacht hast?**
- 162 **A:** Ja, also, ich habe, weil ich weiß, dass da immer 10 drin sind (zeigt auf die Gläser), da habe ich immer 2 gezählt (zeigt auf
 163 zwei Gläser). 2, 4 und da ein einziges (zeigt auf das fünfte Glas), also nicht 2, habe ich 5 gezählt, und dann habe ich schon
 164 die Zahl und die 3 Steine dazu.
- 165 **I: Ok, gut. Lassen wir die da liegen (zeigt auf die 53 Steine). Kannst du mir daneben bitte 35 Steine legen.**
- 166 **A:** Ja (greift zu den Gläsern; lacht). Im Glas geht's auch?
- 167 **I: Ja, alles, was wir da haben, darfst du verwenden.**
- 168 **A:** (schiebt 3 Gläser und 5 einzelne Steine zur Seite; ordnet die 5 einzelnen Steine in einer Reihe an)
- 169 **I: Ok, gut. Ich schiebe es nur etwas hinüber, ja?**
- 170 **A:** Mhm (richtet die Reihe der 5 einzelnen Steine wieder aus).
- 171 **I: Jetzt habe ich da zwei Ziffernkärtchen (legt Ziffernkärtchen „53“ und „35“ auf den Tisch). Kannst du das richtige**
 172 **Kärtchen zu der richtigen Menge legen bitte?**
- 173 **A:** (ordnet die Ziffernkärtchen rasch richtig zu; lacht)
- 174 **I: Ok. Was bedeutet jetzt diese – wo siehst du diese 3 (zeigt auf Einerstelle von 53) hier (zeigt auf die Menge 53)? Was**
 175 **hat die mit deiner Menge hier zu tun?**
- 176 **A:** Hier (zeigt auf die 3 einzelnen Steine) sind die drei Steine, weil 3 Einer, und das ...
- 177 **I: Das sind sie.**
- 178 **A:** Mhm.
- 179 **I: Und was hat diese 3 hier (zeigt auf die Zehnerstelle von 35) mit dieser Menge (zeigt auf die Menge 35) zu tun?**
- 180 **A:** Das sind die 3 Zehner (zeigt auf die 3 Gläser).
- 181 **I: Mhm. Super. Dann können wir die Steine schon wieder in den Kübel füllen.**
- 182 **(A und I füllen die Steine zurück und räumen die Gläser und Ziffernkärtchen weg.)**
- 183 **I: Danke schön.**
- 184 **I: Gut. Jetzt habe ich eine andere Frage. Und zwar: (legt einen leeren Zehnerkarton für Eier auf den Tisch) Das ist ein**
 185 **Eierkarton. Da passen 10 Eier hinein, ja?**
- 186 **A:** Mhm.
- 187 **I: Und so ein kleiner Bauer, der hat in seinem Hühnerstall 43 Eier gefunden (legt das passende Ziffernkärtchen neben**
 188 **den Eierkarton). Wie viele Kartons kann er jetzt voll machen damit?**
- 189 **A:** Ähm (überlegt nur kurz), 4.
- 190 **I: Ok. Wie hast du das herausgefunden?**
- 191 **A:** Weil in jeden Eierkarton (zeigt auf den Eierkarton) 10 reinkommen können. Und es gibt (zeigt auf die Zehnerstelle des
 192 Ziffernkärtchens) 4 Zehner, also 40 Eier, und dann noch die 3 Einer (zeigt auf die Einerstelle). Aber weil es ja geheißen hat
 193 „voll machen“, deswegen kann man die 3 Einer nicht verwenden. Also ja, bräuchte er noch einen Karton dazu.
- 194 **I: Genau. Gut. Und jetzt haben wir (legt Ziffernkärtchen „123“ auf den Tisch) so einen ganz großen Hühnerstall ...**
- 195 **A:** (lacht)
- 196 **I: ... und da haben die Bauern 123 Eier gefunden. Und wie viele kann ich jetzt (zeigt auf den Eierkarton), wie viele kann**
 197 **der vollmachen? Wie viele Zehnerkartons?**
- 198 **A:** (prompt) 12.
- 199 **I: 12. Und wieso hast du das jetzt so schnell gewusst?**
- 200 **A:** Weil 10 mal 10 gleich 100 sind (zeigt auf das Ziffernkärtchen). Und dann gibt's noch die zwei Zehner (zeigt auf die
 201 Zehnerstelle des Ziffernkärtchens), also die 20 gibt's dann noch, und die 3, die er wie vorher verwenden kann.
- 202 **I: Genau, super. Da muss man warten, bis am nächsten Tag wieder welche übrig bleiben. Dann meine nächste Frage:**
 203 **Hans hat schon 47 Euro gespart (legt Ziffernkärtchen „47“ auf den Tisch). Und er möchte sich (legt Ziffernkärtchen**

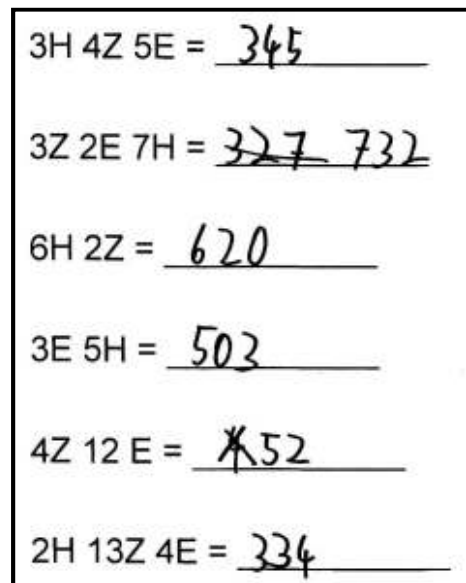
- 204 „87“ auf den Tisch) einen Elektrobaukasten kaufen und der kostet 87 Euro (zeigt auf das Ziffernkärtchen „87“). Und
 205 wie viel Euro muss er noch sparen?
 206 A: (prompt) 40 Euro.
 207 I: Und wieso weißt du das so schnell?
 208 A: Weil 2 mal 4 (zeigt auf die Zehnerstelle von 47) 8 sind (zeigt auf die Zehnerstelle von 87). Und das ergibt dann noch bei
 209 jedem, ähm, ein Nuller wird dazugegeben, und dann war es ja schon 87. Und weil der Siebener schon da ist (zeigt auf die
 210 Einerstellen von 47 und 87), habe ich nix dazugegeben.
 211 I: Ok, gut. Dann habe ich noch eine andere Frage, und zwar: Der Herr Lehrer möchte sich ein I-Pad kaufen und das
 212 kostet 579 Euro (legt Ziffernkärtchen „579“ auf den Tisch). Und (legt Ziffernkärtchen „279“ auf den Tisch) er hat
 213 schon 279 gespart. Wie viel fehlt ihm jetzt noch?
 214 A: (prompt) 300 Euro.
 215 I: Mhm. Wieso hast du das jetzt so schnell gewusst?
 216 A: Weil, weil 2 (zeigt auf die Hunderterstelle von 279) plus 3 gleich 5 ist (zeigt auf die Hunderterstelle von 579) und dann zwei
 217 Nuller dazugegeben.
 218 I: Und woher weißt du, dass du da jetzt noch zwei Nuller dazugeben musst?
 219 A: Weil's bei beiden, ähm, drei Zahlen sind. Und wenn es zwei Zahlen wären, dann hätt ich nur einen Nuller dazugeben
 220 müssen, wie eben.
 221 I: Ok, gut. Dann: Kannst du bitte von 357 in Zehnerschritten rückwärtszählen.
 222 A: 257?
 223 I: Von 357.
 224 A: Ok, gut. 357 (überlegt). Soll ich den Zehner extra sagen, oder?
 225 I: Den Zehner?
 226 A: Ich mein die, nein ich mein den Fünfer noch, den Fünfziger noch sagen, oder gleich den Vierziger?
 227 I: Wie du meinst. Du kannst auch gleich den Vierziger sagen.
 228 A: 340, 330, 320, 310, 300, 290, 280, 270 (zügig hintereinander).
 229 I: Ok. Und jetzt von 357 ...
 230 A: Ja (schaut unsicher, kaut an den Fingernägeln)?
 231 I: ... rückwärtszählen in Zehnerschritten?
 232 A: Ähm, (kaut während des Redens an den Fingernägeln) 350, 340, ähm, 330.
 233 I: Ok. Schreibe dir einmal auf, 357.
 234 A: (schreibt 357 in der Reihenfolge HZE auf)
 235 I: Ok. Wenn du jetzt in Zehnerschritten von der Zahl (zeigt auf 357) rückwärtszählst.
 236 A: Ja.
 237 I: Was kommt dann als nächstes?
 238 A: Asooo (lacht), ja, ähm. Ähm, 347 (schreibt die Zahl während des Sprechens in der Reihenfolge HZE auf).
 239 I: Ok. Und kannst du es jetzt einfach wieder weiter sagen?
 240 A: Ja. 337, dreihundertsiebenund (langgezogen) zwanzig, 317, 307, dreihundert, ähm, dreiundneun, nein,
 241 zweihunderdreißundneun, hach (überlegt, schaut nach oben); ähm (schaut in die Luft und bewegt die Lippen rhythmisch
 242 ohne etwas zu sagen; Finger bleiben ruhig; Augen bewegen sich – zählt in Einerschritten rückwärts?), siebenundneunzig.
 243 I: Ok, die ganze Zahl? Also ...
 244 A: 297, ähm, 287, 277 (spricht die Zahlwörter langgezogener und langsamer als vorher bei reinen Zehnerzahlen).
 245 I: Ok, genug gezählt. Nächste Frage: Oma Herta möchte ihren zwei Enkelkindern zu Weihnachten jedem gleich viel
 246 Geld schenken, ja?
 247 A: Ja.
 248 I: Und sie hat zu Hause einen Hunderteuroschein und vier Zehneuroscheine.
 249 A: Ja.
 250 I: Was kann sie machen?
 251 A: (überlegt kurz)
 252 I: Wie kann sie das machen?
 253 A: Ähm, sie könnte zur Bank gehen und den Hunderter gegen zwei Fünfzigerscheine eintauschen.
 254 I: Mhm. Und wie viel Geld bekommt dann jedes Kind?
 255 A: Ähm, 70.
 256 I: Ok, super. Meine letzte Frage schon: Was ist die Hälfte – also meine letzten Fragen. Was ist die Hälfte von 4?
 257 A: 2.
 258 I: Und die Hälfte von 40?
 259 A: 20 (prompt).
 260 I: Und wieso hast du das jetzt so schnell gewusst?
 261 A: Ähm, weil vorher kein Nuller dabei war und da habe ich jetzt einfach einen Nuller dazugegeben, weil beim Vierer war auch
 262 keiner und jetzt war einer dabei.
 263 I: Mhm. Und was ist die Hälfte von 90?
 264 A: Ähm, 45.
 265 I: Und wie bist du darauf jetzt so schnell gekommen?
 266 A: Weil man 90 nicht gut teilen kann, wie, ähm, 9, habe ich, habe ich einfach die Hälfte von 80 genommen und dann habe ich
 267 noch einen Fünfer dazugegeben, also zwei Fünfer sind dann ein Zehner.
 268 I: Mhm. Ok, super erklärt. Und was ist die Hälfte von 200?
 269 A: 100 (prompt).
 270 I: Und von 600?
 271 A: 300 (prompt).
 272 I: Und woher weißt du das so schnell?
 273 A: Weil die Hälfte von 6 3 ist.
 274 I: Mhm, und woher weißt du dann, dass es jetzt 300 sind?
 275 A: Weil ich, weil bei beiden Zahlen, ähm, zwei Nuller dabei waren. Und da habe ich halt die zwei Nuller wieder dazugegeben.
 276 I: Mhm. Was ist die Hälfte von 500?
 277 A: 500? Ähm, 250.

- 278 I: Und woher weißt du das?
 279 A: Weil man 5 wieder nicht gut teilen kann, genauso wie 9. Und da hab ich jetzt, und zwei Fünziger sind wieder ein Hunderter.
 280 I: Mhm, ok. Und die Hälfte von 700?
 281 A: 700? Ähm, 350.
 282 I: 350.
 283 A: Ja.
 284 I: Und wieso das? Wie bist du darauf gekommen?
 285 A: Hm (*lacht*), ähm (*lacht*), weil man 7 wieder nicht gut teilen kann (*lacht*).
 286 I: Ok.
 287 A: Also immer die gleiche Rechnung.
 288 I: Ok, passt. Gut, danke vielmals, das war es schon.
 289



59
362
704
357
347

Kind A – geschriebene Zahlen



3H 4Z 5E = 345
 3Z 2E 7H = 327 732
 6H 2Z = 620
 3E 5H = 503
 4Z 12 E = 452
 2H 13Z 4E = 334

Kind A – AB 3

8.3 Interview mit Kind B

Interview Nr. 2
Kind B
Datum: 26.09.2012
Beginn: 08:42:16
Ende: 09:12:51
Dauer: 00:20:35

- 1 I: Das Wichtigste ist heute: Ich werde dir heute, wenn du etwas ausrechnest oder aufschreibst, nicht sagen, ob das
2 richtig oder falsch ist, sondern ich werde dich immer fragen, wie du das gemacht hast, oder wie du das gerechnet
3 hast.
4 B: Ja.
5 I: Weil mir ist heute wichtig herauszufinden, wie du denkst und wie du das machst, die Aufgaben lösen.
6 B: Mhm.
7 I: Ok, gut. Die erste Aufgabe: Ich werde dir jetzt drei Zahlen sagen und du schreibst sie bitte da auf diesen Zettel. Du
8 kannst auch den dicken Stift nehmen und du darfst auch ruhig groß schreiben, damit man das gut sehen kann. Ok?
9 B: Mhm (richtet Stift und Zettel her).
10 I: 59
11 B: (schreibt 59 in der Reihenfolge ZE)
12 I: Ok. 362.
13 B: (schreibt 362 in der Reihenfolge HZE)
14 I: Mhm, und 704.
15 B: (schreibt 704 in der Reihenfolge HZE)
16 I: Ok. Das war die erste schwierige Aufgabe. Jetzt möchte ich dich fragen: (legt Ziffernkärtchen „246“ auf den Tisch)
17 Kannst du mir die Zahl bitte vorlesen?
18 B: 246.
19 I: Ok. Und was bedeutet die Vier (zeigt auf die Zehnerstelle von 246) in dieser Zahl?
20 B: (überlegt, schaut verlegen) Das ist dann der Zehner.
21 I: Das ist der Zehner?
22 B: Ja.
23 I: Ok, gut. Und wenn da 4 steht, was bedeutet das dann?
24 B: Dass das noch 40, ähm, Zahlen, also ...
25 I: 40 noch.
26 B: Ja, 40 noch dazu.
27 I: Ok, gut, super.
28 Dann meine nächste Frage. Den Stift kannst du wieder weglegen. Den brauchen wir jetzt momentan nicht, erst
29 nachher wieder.
30 B: (legt den Stift beiseite)
31 I: Ich habe hier eine Preisliste von Fahrrädern (legt Preisliste von Fahrrädern auf den Tisch), ja?
32 B: Mhm.
33 I: Kannst du mir sagen, welches Fahrrad das teuerste ist?
34 B: 653 (prompt).
35 I: Kannst du mir zeigen, wo das steht?
36 B: (zeigt auf 653)
37 I: Da. Und wie bist du darauf so schnell gekommen?
38 B: Ich habe einfach mal die Zahlen angeschaut. Am Anfang (zeigt auf die zwei Zahlen mit 6 an der Hunderterstelle) ist die
39 größte Zahl die 6, also von den beiden. Und dann ist da (zeigt auf Zehnerstelle von 653) die 5 größer als die 3 (zeigt auf die
40 Zehnerstelle von 635).
41 I: Mhm. Und was bedeutet das, wenn da (zeigt auf die Hunderterstelle von 653) eine 6 steht, da ganz vorne?
42 B: Also 600.
43 I: Mhm. Ok, super. Dann (legt Ziffernkärtchen „305“ und „299“ auf den Tisch), kannst du mir bitte die zwei Zahlen
44 vorlesen?
45 B: 305 und 299.
46 I: Ok. Welche ist da größer?
47 B: Die 305.
48 I: Und woher hast du das jetzt so schnell gewusst?
49 B: Weil die 3 (zeigt auf Hunderterstelle von 305) größer ist als die 2 (zeigt auf die Hunderterstelle von 299).
50 I: Und was bedeutet jetzt die 2 da (zeigt auf die Hunderterstelle von 299) zum Beispiel?
51 B: 200.
52 I: Ok. Super. Ich sehe schon, das ist kein Problem. Gut. Dann habe ich jetzt hier (legt AB 3 auf den Tisch) - jetzt
53 brauchst du den dicken Stift wieder. Weißt du, was diese Symbole bedeuten (zeigt auf 3H 4Z 5E), also die
54 Buchstaben?
55 B: Ja. Das (zeigt auf 3H) beutet 300, (zeigt auf 4Z) 4 Zehner, (zeigt auf 5E) 5 Einer.
56 I: Super. Jetzt möchte ich bitte, dass du immer die Zahl, die das bedeutet (zeigt auf 3H 4Z 5E) daneben schreibst und
57 mir auch laut vorliest.

- 58 B: Ok.
 59 **I: Und mir auch sagst, wie diese Zahl heißt.**
 60 B: (löst Aufgabe 3H 4Z 5E = 345) 345.
 61 **I: Mhm.**
 62 B: (löst Aufgabe 3Z 2E 7H = 327) 327.
 63 **I: Mhm. Wie bist du darauf gekommen?**
 64 B: Hmm (wirft einen fragenden Blick zu I; überlegt), dass (überlegt); ich habe einfach da (zeigt auf die Angabe) die, ähm, die,
 65 ähm, Buchstaben weggelesen.
 66 **I: Du hast dir die Buchstaben weggelesen.**
 67 B: Mhm.
 68 **I: Ok.**
 69 B: (löst Aufgabe 6H 2Z = 620)
 70 **I: Mhm. Wie bist du darauf gekommen?**
 71 B: Also bei den ersten habe ich mir die Buchstaben weggelesen (legt je einen Finger auf H und Z der Aufgabe 6H 2Z) und dann
 72 habe ich halt mir noch einen, also weil da keine Einerstelle ist, einen Nuller eingefügt.
 73 **I: Ok. Mhm.**
 74 B: (löst die Aufgabe 3E 5H = 503 bedacht)
 75 **I: Mhm. Wie bist du darauf jetzt gekommen?**
 76 B: Also, ich hab, ähm, da (zeigt auf 5H) 5 Hunderter hingeschrieben (zeigt auf Hunderterstelle von 503), weil da (zeigt auf die
 77 Angabe) nix von Zehnern steht, hab ich einen Nuller hingeschrieben (zeigt auf die Zehnerstelle von 503), ...
 78 **I: Mhm.**
 79 B: ..., und weil da (zeigt auf 3E) 3 Einer stehen, hab ich 3 Einer (zeigt auf Einerstelle von 503) hingeschrieben.
 80 **I: Ok.**
 81 B: (löst Aufgabe 4Z 12E = 4; lacht; schreibt 52 darüber)
 82 **I: Ok. Wie bist du darauf jetzt gekommen?**
 83 B: Ähm, weil ich hab von den 4 Zehnern (zeigt auf 4Z) und 12 Einern (zeigt auf 12E), hab ich einfach den Einser (zeigt auf Ziffer
 84 1 der Angabe 12E) zu dem Fünfer dazu, also zu dem Vierer (zeigt auf 4Z) dazugegeben, also 5. Und 2 sind da noch übrig
 85 und ich hab's hingeschrieben.
 86 **I: Mhm. Und warum hast du den Einser (zeigt auf 12E) da hinüber (zeigt auf 4Z) genommen?**
 87 B: Weil, es ist ja, wenn du jetzt 40 plus 12 rechnen würdest, würde das 52 ergeben, und jetzt nicht vierhundertzwö, also
 88 vierhundert, ähm, zwölf.
 89 **I: Ok, super. Und noch das letzte bitte.**
 90 B: (löst Aufgabe 2H 13Z 4E = 334)
 91 **I: Mhm. Wie bist du darauf jetzt gekommen?**
 92 B: Ähm, also ich hab, ich hab da auch wieder gerechnet, 6, also 2 Hunderter (zeigt auf 2H) plus 13 Zehner (zeigt auf 13Z), also
 93 den Einser (zeigt auf Ziffer 1 der Angabe 13Z) hab ich zu dem Zweier (zeigt auf 2H) dazugerechnet, sind 3. Dann ist auch
 94 der Dreier (zeigt auf Ziffer 3 der Angabe 13Z) übrig geblieben, dann habe ich 33 (zeigt Hunderter und Zehnerstelle von 334)
 95 hingeschrieben und die (zeigt auf 4E) 4 Einer (zeigt auf Einerstelle von 334).
 96 **I: Mhm. Danke schön. Das war es schon mit der Aufgabe (räumt Zettel weg). Ok, jetzt habe ich eine ganz andere**
 97 **Aufgabe. Jetzt machen wir etwas ganz anderes. Ich habe Steine mitgebracht (leert Steine aus einem Kübel auf den**
 98 **Tisch). Und dann habe ich auch noch Gläser mitgebracht (räumt 8 Gläser auf den Tisch). Wir werden das jetzt**
 99 **gemeinsam machen, ja?**
 100 B: Mhm.
 101 **I: Wir füllen in jedes Glas 10 Steine ein. Ok?**
 102 B: Ok.
 103 **I: Und das machen wir jetzt gemeinsam. Ich helfe dir da dabei, dass es ein bisschen schneller geht. Also in jedes Glas**
 104 **10 Steine, und wenn schon 10 Steine drin sind, stellen wir die Gläser da hinüber, damit wir wissen, dass hier schon**
 105 **10 drin sind, gut?**
 106 B: Gut (füllt die ersten 3 Gläser in Zweierschritten: legt immer mit beiden Händen gleichzeitig je einen Stein in das Glas; geht
 107 beim vierten Glas dazu über, in Einerschritten die Hand zu füllen und anschließend alle 10 Steine gleichzeitig in das Glas zu
 108 füllen; keine Lippenbewegung erkennbar).
 109 **I: Ok (rückt übrige Steine zur Seite und die gefüllten Gläser in zwei Viererreihen angeordnet in den Mittelpunkt). Jetzt**
 110 **haben wir da diese Zehnergläser. Kannst du mir sagen, wie viele Steine das sind (zeigt auf alle gefüllten Gläser)?**
 111 B: (zählt ohne Handbewegung und mit sehr leise flüsternder Lippenbewegung) 80.
 112 **I: Ok. Wie bist du darauf gekommen.**
 113 B: Ich hab einfach mal die Gläser gezählt, das sind halt 8 (macht eine kreisende Handbewegung über alle Gläser), und dann
 114 hab, und dann hab ich 8 mal 10 gerechnet.
 115 **I: Ok, gut. Jetzt schieben wir mal alle Steine zu dir (schiebt die Gläser in Reichweite von B), die auch (schiebt übrige**
 116 **Steine in Reichweite von B) Und jetzt möchte ich, dass du mir 25 Steine gibst, da (zeigt auf freie Fläche am Tisch).**
 117 B: Von den Gläsern (zeigt auf die Gläser) oder von da (zeigt auf die übrigen Steine)?
 118 **I: Wie du das möchtest. Wie du das – was du nehmen möchtest. Bei mir sollen dann 25 Steine sein.**
 119 B: (zählt 21 Steine in Zweierschritten vom ungebündelten Haufen Steine durch gleichzeitiges Verschieben von je einem Stein
 120 pro Hand weg; stockt bei 16 Steinen kurz; schiebt Steine zu I)
 121 **I: Ok, gut. Könnest du mir das auch so hinlegen, dass ich auf einen Blick erkennen kann, dass das 25 Steine sind?**
 122 B: Mhm (ordnet die Steine in folgender Reihenfolge: eine Fünfergruppe nach dem Würfelbild, zwei Sechsergruppen nach dem
 123 Würfelbild, eine Vierergruppe nach dem Würfelbild).
 124 **I: Mhm. Wie kann ich das jetzt erkennen, dass das 25 sind?**
 125 B: Also ich hab es mir so ein bisschen so gedacht wie bei dem Würfel, so: Da (macht mit Zeigefinger und Daumen eine Spange
 126 um die Vierergruppe) sind 4, da (zeigt auf die Fünfergruppe) sind noch 5 und da sind dann ein Se – einmal 6 und noch
 127 einmal 6.
 128 **I: Mhm, ok. Und ein anderes Kind hat mir die 25 so gelegt (stellt 2 Gläser zur Seite), dass es mir 2 Gläser hergestellt**
 129 **hat, (legt 5 einzelne Steine dazu) und 5 einzelne. Wo sind da (zeigt auf die 2 Gläser und die 5 Steine) die 25?**
 130 B: Ähm, er weiß mal: Ok, hier im Glas (zeigt auf die 2 Gläser) sind 10.
 131 **I: Mhm.**

- 132 B: Das heißt 20. Und da (*zeigt auf die 5 einzelnen Steine*) liegen dann noch 5, sind 25.
 133 I: **Ok. Und welche Darstellung findest du jetzt einfacher oder ist das ...?**
 134 B: Ja, ist eh die (*zeigt auf 2 Gläser und 5 Steine*).
 135 I: **Ok. Jetzt habe ich eine Frage an dich. Jetzt lege ich (*legt 5 Gläser und 3 Steine zur Seite*) das hier. Wie viele Steine**
 136 **sind das?**
 137 B: (*prompt*) 53.
 138 I: **Ok, 53. Jetzt möchte ich bitte, dass du mir hier daneben 35 Steine legst (*zeigt auf den Platz neben der Menge 53*).**
 139 B: (*greift sofort zu den 3 Gläser und schiebt diese sowie 5 einzelne Steine zur Seite*)
 140 I: **Ok, super. Und kannst du bitte jetzt diese zwei Kärtchen (*legt Ziffernkärtchen „35“ und „53“ auf den Tisch*) so**
 141 **dazulegen, dass das richtige Kärtchen bei der passenden Menge liegt?**
 142 B: (*ordnet Kärtchen schon während der Fragestellung richtig zu*)
 143 I: **Mhm. Und was bedeutet – die 3 (*zeigt auf Einerstelle von 53*), die in dieser Zahl steht, was hat die mit dieser Menge**
 144 **da (*zeigt auf die Menge 53 aus gefüllten Gläsern und einzelnen Steinen*) zu tun?**
 145 B: Ähm, naja, das sind (*nimmt die 3 einzelnen Steine in die Hand*), das sind 3 Einer, und die 3 Steine würden halt zum Dreier
 146 gehören, und die Gläser würden zum Fünfer gehören.
 147 I: **Ok. Und hier (*zeigt auf Zehnerstelle von 35*) steht auch ein Dreier. Und was hat der Dreier mit der Menge (*zeigt auf die***
 148 **Menge 35 aus gefüllten Gläsern und einzelnen Steinen) zu tun?**
 149 B: Der Dreier, weil er am Anfang steht, gehört da zu den Gläsern (*zeigt auf Gläser der Menge 35*), der Fünfer zu den Steinen
 150 (*zeigt auf die 5 einzelnen Steine*).
 151 I: **Ok, gut. Dann brauchen wir jetzt die Kärtchen nicht mehr und wir leeren auch die Steine wieder zurück in den Kübel.**
 152 B: (*hilft beim Wegräumen*)
 153 I: **Danke. So, jetzt habe ich eine ganz andere Frage (*legt einen Zehner-Eierkarton auf den Tisch*), und zwar: In einen**
 154 **solchen Eierkarton passen immer 10 Eier. Ja?**
 155 B: Ja.
 156 I: **So kann man die kaufen. Und ein Bauer, so ein kleiner Bauer, (*legt Ziffernkärtchen „43“ auf den Tisch*) hat ein paar**
 157 **Hühner und er hat in seinem Hühnerstall 43 Eier gefunden. Wie viele Kartons kann er damit voll machen?**
 158 B: (*prompt*) 4 kann er voll machen und 3 Eier würden ihm übrig bleiben.
 159 I: **Ok. Und wie hast du das so schnell herausgefunden?**
 160 B: Ähm, weil in einen, (*zeigt auf den Karton*) weil in einen Karton 10, 10 Eier hineinpassen, ...
 161 I: **Mhm.**
 162 B: ... hab ich, ähm, hab ich mir halt gedacht: 40 Eier; 10 davon kommen in einen (*fasst den Karton von rechts und links*), dann
 163 in noch einen (*deutet mit den Händen einen weiteren Karton neben dem vorhandenen an*), in noch einen (*deutet mit den*
 164 *Händen einen weiteren Karton neben dem davor angedeuteten an*) und in noch einen (*deutet mit den Händen einen*
 165 *weiteren Karton an*). Und dann sind es halt 4 Kartons (*zeigt auf den vorhanden und die zuvor angedeuteten nicht*
 166 *vorhandenen Kartons*).
 167 I: **Ok. Super (*räumt das Ziffernkärtchen „43“ weg*). Und ein ganz großer Hühnerbetrieb, ja, (*legt das Ziffernkärtchen***
 168 **„123“ auf den Tisch) der hat 123 Eier gefunden (*zeigt auf das Ziffernkärtchen*). Und wie viele Kartons kann der voll**
 169 **machen?**
 170 B: (*prompt*) 12.
 171 I: **Und woher hast du das so schnell gewusst?**
 172 B: Da hab ich mir jetzt einfach die Drei weggegeben (*deckt die Einerstelle von 123 ab*), weil 3 kannst du ja nicht in den Karton
 173 (*zeigt auf den Zehnerkarton*) geben, weil es zu wenig sind. Und dann bleiben ja noch 12 (*zeigt auf Hunderter und*
 174 *Zehnerstelle von 123*) übrig.
 175 I: **Ok, gut. Super (*räumt Ziffernkärtchen und Zehnerkarton weg*). Ich sehe schon, die Eieraufgabe ist kein Problem. Jetzt**
 176 **habe ich eine andere Frage, und zwar: Der Hans hat schon 47 Euro gespart (*legt Ziffernkärtchen „47“ auf den***
 177 **Tisch), ja?**
 178 B: Mhm.
 179 I: **Und er möchte sich einen Elektrobaukasten kaufen (*legt Ziffernkärtchen „87“ auf den Tisch*) und dieser**
 180 **Elektrobaukasten, der kostet 87 Euro (*zeigt auf 87*). Und, wie viele Euro muss er noch sparen?**
 181 B: (*prompt*) 40 Euro.
 182 I: **Und woher weißt du das so schnell?**
 183 B: Weil (*zeigt auf die Einerstellen von 87 und 47*) die Einer stimmen schon einmal. Das heißt, ich muss nur 4 (*zeigt auf die*
 184 *Zehnerstelle von 47*) auf 8 (*zeigt auf die Zehnerstelle von 87*) rechnen.
 185 I: **Ok. Und diese Vier (*zeigt auf Zehnerstelle von 47*) oder diese 8 (*zeigt auf Zehnerstelle von 87*) da bedeutet – was**
 186 **bedeutet der Vierer in der Zahl?**
 187 B: Das bedeutet halt, ähm, 4 Zehner und 7 Einer.
 188 I: **4 Zehner und 7 Einer. Ok, super. Und 4 Zehner sind wie viel?**
 189 B: Vierzig.
 190 I: **Vierzig, gut (*räumt Ziffernkärtchen weg*). Und der Herr Lehrer, der möchte sich ein I-Pad kaufen. Und dieses I-Pad**
 191 **kostet (*legt Ziffernkärtchen „579“ auf den Tisch*) 579 Euro. Und er hat schon (*legt Ziffernkärtchen „279“ auf den***
 192 **Tisch) 279 Euro gespart. Wie viel braucht er noch?**
 193 B: (*prompt*) 300 Euro.
 194 I: **Und woher hast du das so schnell gewusst?**
 195 B: Weil ich da auch mir wieder diese Zahlen (*deckt Einer- und Zehnerstellen beider Ziffernkärtchen mit je einer Hand ab*)
 196 weggeben konnte, und dann muss ich nur noch den Zweier (*zeigt auf Hunderterstelle von 279*) auf den Fünfer (*zeigt auf*
 197 *Hunderterstelle von 579*) rechnen.
 198 I: **Und woher weißt du dann, dass das dann 300 sind und nicht 3?**
 199 B: Weil das, weil die Zahl (*zeigt auf 579*) besteht aus drei (*zeigt auf 279*), aus drei, ähm, Ziffern.
 200 I: **Mhm. Ok, gut (*räumt Ziffernkärtchen weg*). Dann kommen wir zu etwas anderem. Und zwar möchte ich bitte, dass du**
 201 **von 357 in Zehnerschritten rückwärts zählst.**
 202 B: (*überlegt, lacht verlegen*) Ok.
 203 I: **Oder versuche es einmal von 350 in Zehnerschritten rückwärts zählen**
 204 B: Ok. 340, 330, 320, 310, 300, 290, 280, 270 (*sicher und in konstanter Geschwindigkeit; ohne zu stocken*).
 205 I: **Ok. Und jetzt von 357?**

- 206 B: (zögert kurz) Dreihundert-sie-ben-undvierzig, 337, 327, dreihundert, dreihundert (lacht), 317, 307, (überlegt kurz) zwei (lacht,
207 überlegt).
- 208 I: Lass dir ruhig Zeit.
- 209 B: (überlegt; schaut nach oben; keine Zählbewegungen mit Fingern oder Lippen erkennbar) zweihundert-siebenundneunzig,
210 287, 277.
- 211 I: Ok, super. Dann hab ich eine andere Frage, und zwar: Die Oma Herta hat zwei Enkelkinder und sie möchte zu
212 Weihnachten jedem Enkelkind gleich viel Geld schenken, ja? Aber jetzt hat sie zu Hause nur einen
213 Hunderteuroschein (deutet Schein mit den Fingern an) und 4 Zehneuroscheine (deute Scheine mit Fingern an), ja?
214 Also einen Hunderteuroschein und 4 Zehneuroscheine. Was könnte sie jetzt machen?
- 215 B: Sie könnte den Hunderteurschein zum Beispiel wech, wechseln lassen in der Bank.
- 216 I: Mhm. Und was würde sie dafür bekommen?
- 217 B: 10 Zehner.
- 218 I: Zehn Zehner. Und wie viel würde dann jedes Kind bekommen?
- 219 B: Dann würde jedes Kind (überlegt; blickt nach oben und unten) zweiund, ähm, sieb-zig (unsicher) Euro bekommen.
- 220 I: Mhm. Und wie hast du das jetzt gerechnet?
- 221 B: Ich hab gerechnet, ähm, also, ich hab ze, ich hab jedem Kind einmal 5 Zehner gegeben vom Hunderteurschein und dann hab
222 ich jedem noch 2 Zehner gegeben von den 4 Zehnern.
- 223 I: Ok, gut. Und jetzt kommen wir schon zur letzten Frage, und zwar: Die Hälfte von 4 ist wie viel?
- 224 B: (prompt) 2.
- 225 I: Und die Hälfte von 40?
- 226 B: (prompt) 20.
- 227 I: Wie bist du darauf gekommen? Wie hast du das ...?
- 228 B: Ähm (überlegt, lacht), die Hälfte von 40 ist ja 20, weil zum Beispiel: 5 mal 4 ist gleich 20. Und 10 mal 4 wäre 40.
- 229 I: Ok. Und die Hälfte von 90?
- 230 B: (überlegt kurz) Ist 45.
- 231 I: Mhm. Wie hast du das so schnell gewusst?
- 232 B (überlegt) Ähm, weil (überlegt länger), ähm (überlegt, lacht verlegen), also: 90, 10 mal 9 ist 90.
- 233 I: Mhm.
- 234 B: Und 5 mal 9 ist 45.
- 235 I: Mhm. Ok. Und jetzt: Die Hälfte von 200?
- 236 B: (prompt) Ist 100.
- 237 I: Mhm. Und die Hälfte von 600?
- 238 B: (prompt) ist 300.
- 239 I: Und die Hälfte von 500?
- 240 B: Ist zweihundert-fünzig.
- 241 I: Und die Hälfte von 700?
- 242 B: (überlegt) Ist 350.
- 243 I: Und wie bist du darauf gekommen? Wie hast du das gerechnet?
- 244 B: (überlegt) Ähm, ich hab mir, ich hab mir einfach da überall die Null wieder weggegeben am Ende. Haben wir zum Beispiel die
245 Hälfte von 700 ist, ähm, von 70 wäre dann 35.
- 246 I: Mhm.
- 247 B: Dann häng ich einfach noch ne Null dran, dann ist es 350.
- 248 I: Ok, super. Gut, das war es schon. Danke vielmals. Das hast du toll gemacht.
- 249

59 362 704

Kind B – geschriebene Zahlen

3H 4Z 5E = 345

3Z 2E 7H = 327

6H 2Z = 620

3E 5H = 503

4Z 12 E = 52

2H 13Z 4E = 334

Kind B – AB 3

8.4 Interview mit Kind C

Interview Nr. 5
Kind C
Datum: 26.09.2012
Beginn: 10:21:06
Ende: 10:47:24
Dauer: 00:26:18

- 1 I: Das Wichtigste heute: Wenn du jetzt irgendetwas rechnest, oder machst oder so, werde ich dir nicht sagen, ob das
2 richtig oder falsch ist, sondern ich frag dich dann immer nur, wie du das gemacht hast, ja?
3 C: Ja.
4 I: Aber das frage ich dich immer wieder einmal, weil heute interessiert mich nur, wie du denkst, und wie du das
5 rechnest, ok? Das ist mir heute wichtig.
6 C: (nickt; lacht)
7 I: Die erste Aufgabe: Ich sage dir jetzt 3 Zahlen an und du schreibst die Zahlen bitte einfach auf den Zettel
8 untereinander. Und du kannst ruhig groß schreiben, dass ich es gut erkennen kann.
9 C: Ok.
10 I: 59.
11 C: (zögert kurz; schreibt 59 in der Reihenfolge EZ)
12 I: 362.
13 C: (schreibt 362 flott in der Reihenfolge HEZ)
14 I: Und 704.
15 C: (schreibt 704 in der Reihenfolge HZE; zögert nach der Hunderterstelle)
16 I: Ok. Dann meine nächste Frage (legt Ziffernkärtchen „246“ auf den Tisch): Kannst du mir bitte die Zahl vorlesen?
17 C: (prompt) 246.
18 I: Gut. Und was bedeutet die Vier (zeigt auf die Zehnerstelle von 246) in dieser Zahl?
19 C: Das sind die Zehner.
20 I: Ok. Und was heißt das jetzt, wenn da ein Vierer steht?
21 C: Dass es 40 Zehner sind.
22 I: 40 Zehner?
23 C: (überlegt kurz) 4 Zehner.
24 I: 4 Zehner. Und 4 Zehner sind?
25 C: 40.
26 I: Ok, das war schon die erste Aufgabe (räumt Ziffernkärtchen weg). Meine zweite Frage - den Stift kannst du jetzt zur
27 Seite legen, den brauchen wir erst nachher wieder (legt Preisliste von Fahrrädern auf den Tisch). Ich habe da eine
28 Preisliste von Fahrrädern. Kannst du mir sagen, welches das teuerste Fahrrad ist?
29 C: Hmm (schaut auf die Preisliste und überlegt 6 Sekunden). Das da (zeigt auf 653, das teuerste Fahrrad).
30 I: Mhm. Wie bist du darauf gekommen?
31 C: Ich hab zuerst geschaut, was die höchsten Hunderter sind (fährt dabei die Spalte der Hunderterstellen von oben nach unten
32 ab). Dann hab ich die zwei Sechser gesehen (zeigt auf 653 und 635). Und dann hab ich auf die Zehner geschaut (zeigt auf
33 die Zehnerstellen der beiden Zahlen), und beim einen war 50 (zeigt auf die Zehnerstelle von 653) und beim anderen war 30
34 (zeigt auf die Zehnerstelle von 635). Also war das mit 50 das höhere.
35 I: Mhm. Aber bei den Einern (zeigt auf die Einerstellen von 635 und 653) ist das bei dem (zeigt auf 635) höher.
36 C: Ja, ja das ist bei dem höher, aber weil – Zehner sind mehr als Einer (zeigt auf die Zehnerstelle von 653). Und das heißt, egal
37 ob das (zeigt auf die Einerstelle von 653) jetzt kleiner ist als das (zeigt auf die Einerstelle von 635), trotzdem ist das (zeigt
38 auf 653) höher, weil ja der Zehner höher ist (zeigt auf die Zehnerstelle von 653).
39 I: Das hast du mir toll erklärt (räumt Preisliste weg; legt Ziffernkärtchen „305“ und „299“ auf den Tisch). Kannst du mir
40 bitte die zwei Zahlen vorlesen?
41 C: 305 und 299.
42 I: Ok. Und welche ist da größer?
43 C: Da ist die (zögert kurz) 305 größer (zeigt auf das Ziffernkärtchen), weil sie einen größeren Hunderter hat.
44 I: Mhm, ok. Und kannst du mir noch bitte die zwei Zahlen (legt Ziffernkärtchen „25“ und „52“ auf den Tisch) vorlesen?
45 C: 25 und 52.
46 I: Welche ist da größer?
47 C: Die 52 (zeigt auf das Ziffernkärtchen).
48 I: Und woher weißt du das so schnell?
49 C: Es ist zwar eine Falle, weil sie, weil es die gleichen Zahlen sind, aber die Zahlen sind umgedreht. Das heißt, die 2 (zeigt auf
50 die Zehnerstelle von 25) ist größer als die 5 (zeigt auf die Zehnerstelle von 52). Das sagt einem schon, dass, dass, äh,
51 dass, dass (zeigt auf die Einerstelle von 52) 52 größer ist, weil wenn eine vordere Stelle (zeigt auf die Zehnerstelle von 52)
52 schon höher ist als die andere (zeigt auf die Zehnerstelle von 25), ist es schon klar, dass das höher ist, auch wenn die Einer
53 vom anderen größer ist.
54 I: Ok. Du erklärst mir das ganz toll, das ist super (räumt Ziffernkärtchen weg). Jetzt brauchst du wieder diesen dicken
55 Stift (legt AB3 auf den Tisch). Kennst du diese Symbole (zeigt auf die Angabe 3H 4Z 5E)? Kannst du mir sagen, was
56 das bedeutet?
57 C: Hunderter (zeigt auf H), Zehner (zeigt auf Z) und Einer (zeigt auf E).

- 58 **I: Super. Jetzt möchte ich bitte, dass du immer die Zahl, die das (zeigt auf die Angabe) bedeutet, immer daneben**
 59 **schreibst (zeigt auf die freie Linie neben der Angabe) und mir auch laut sagst, wenn du es dann aufschreibst, ok?**
 60 **C: (nickt; löst Aufgabe 3H 4Z 5E = 345) Dreihundert-fünfund-vierzig (schreibt die Ziffern während des Sprechens in der**
 61 **Reihenfolge HZE).**
 62 **I: Mhm.**
 63 **C: (löst die Aufgabe 3Z 2E 7H = 327) Dreihundert-siebenund-zwanzig (schreibt die Ziffern während des Sprechens in der**
 64 **Reihenfolge HEZ).**
 65 **I: Mhm. Wie bist du darauf gekommen (zeigt auf die Aufgabe)?**
 66 **C: Also, ich bin darauf gekommen (stockt; überlegt), oh, Mist (lacht). Das ist falsch rum (zeigt auf die Angabe). Da sind die**
 67 **Zehner (zeigt auf 3Z), Einer (zeigt auf 2E) und Hunderter (zeigt auf 7H). Das heißt, es ist nicht 327, sondern 732.**
 68 **I: Mhm. Du darfst es auch durchstreichen und neu schreiben.**
 69 **C: (streicht 327 durch) Siebenhundert-zweihunddreißig (schreibt die Ziffern während des Sprechens in der Reihenfolge HEZ).**
 70 **I: Wie bist du darauf jetzt gekommen?**
 71 **C: Ähm, es, weil die, bei den Hundertern waren es 7, und bei den Zehnern waren 30, 3. Das heißt, dann muss die 2 dann hinten**
 72 **hin, weil es noch die letzte Stelle ist.**
 73 **I: Mhm, ok.**
 74 **C: Ähm, das, sechshundert-zwanzig (löst die Aufgabe 6H 2Z = 620; schreibt die Ziffern während des Sprechens in der**
 75 **Reihenfolge HZE).**
 76 **I: Ok. Wie bist du darauf gekommen?**
 77 **C: Ähm, weil man da (zeigt auf die Angabe) keine, ähm, Einer angezeigt sind, sind es automatisch null Einer.**
 78 **I: Mhm. Was wäre, wenn ich die Null (zeigt auf die Einerstelle von 620) da nicht hinschreiben würde?**
 79 **C: Dann würde es 62 heißen. Deswegen muss man immer bei den Hunderter, Hundertern, wenn kein Einer ist, eine Null**
 80 **hinschreiben, dass man weiß, dass es ein Hunderter ist und kein Zehner.**
 81 **I: Mhm, gut. Nächste Zahl?**
 82 **C: Hundert-dreißig (löst die Aufgabe 3E 5H = 530; schreibt die Ziffern während des Sprechens in der Reihenfolge HZE).**
 83 **I: Mhm. Wie bist du darauf gekommen?**
 84 **C: Ah (überlegt; schaut auf das Arbeitsblatt), wart, das (zeigt auf 3E) ist ein Einer. Hundertdrei (schreibt an der Einerstelle 3**
 85 **über 0; schreibt an der Zehnerstelle 0 über 3), Hundertdrei.**
 86 **I: Mhm. Und wie bist du darauf jetzt gekommen?**
 87 **C: Weil da der Zehner fehlt, und da gehört dann auch eine Null hin, dass man weiß, dass es, ähm, dass es, dass man weiß,**
 88 **dass es, dass es ein Hunderter ist halt eben.**
 89 **I: Mhm. Und was bedeutet die Null da (zeigt auf die Zehnerstelle von 503) bei 503?**
 90 **C: Das heißt, dass kein Zehner ist. Es gibt ja auch 1, 2, 3, 4, 5, das Normale, aber da muss man keinen Nuller dazu, weil noch**
 91 **keine höhere Stelle ist, wenn da nur Einer sind. Da sind schon Hunderter (zeigt auf Hunderterstelle von 503), deswegen**
 92 **muss man auch dazuschreiben, dass es Hunderter sind, weil es könnte ja auch heißen 53 (zeigt zuerst auf Einerstelle, dann**
 93 **auf Hunderterstelle von 503), wenn der Nuller nicht da wär.**
 94 **I: Stimmt. Mhm, super. Die nächste Zahl bitte (zeigt auf die nächste Aufgabe).**
 95 **C: Hmm (überlegt 15 Sekunden; löst die Aufgabe 4Z 12E = 42).**
 96 **I: Wie heißt die Zahl?**
 97 **C: Ähm, (schreibt 5 über die Zehnerstelle von 42) 52.**
 98 **I: Ok. Und wie bist du darauf jetzt gekommen?**
 99 **C: Ich hab den Zehner von den 12, den, den Zehner von den 12 Einern hab ich einfach (zeigt auf 4Z) als Zehner dazugegeben.**
 100 **Da ist dann statt einer Vier eine Fünf. Und dann hab ich einfach die zwei restlichen dazugegeben von den Einern.**
 101 **I: Ok, gut. Die letzte Zahl?**
 102 **C: (löst die Aufgabe 2H 13Z 4E = 334; zögert kurz nach Notieren der Hunderterstelle)**
 103 **I: Ok. Und wie hast du das jetzt gemacht?**
 104 **C: Also ich hab den, hmm, äh, warte, hmm, das ist, hmm, ah (überlegt insgesamt 23 Sekunden; schaut die gesamte Zeit kritisch**
 105 **auf die gelöste Aufgabe), ah, das ist, da kommt eine Eins (überschreibt die Zehnerstelle von 334 mit 1) und da eine Sieben**
 106 **(überschreibt die Einerstelle von 314 mit 7). Weil den – man muss (zeigt auf 13Z) so viele abziehen, bis es ein normaler**
 107 **Zehner ist. Das ist hier (zeigt auf 13Z) 3, die muss man abziehen. Und 4 plus 3 ist 7. Und das heißt dann, das ist ein Zweier**
 108 **(streicht 317 durch), zwei, eins, sieben (schreibt 217 in der Reihenfolge HZE daneben). Es kommt dann raus: 217.**
 109 **I: Ok gut. Dann werden wir einmal diese letzte Zahl – legen wir uns das mit dem Geld auf. Also was brauchen wir alles?**
 110 **Wir brauchen 2 Hunderter (schiebt 2 Hunderterscheine zu C).**
 111 **C: Zwei Hunderter.**
 112 **I: Dann brauchen wir (legt Zehnerscheine zu C) – nimmst du dir so viele Zehnerscheine, wie du brauchst?**
 113 **C: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 (zählt die Zehnerscheine einzeln vom Stapel; zögert; blickt auf die Angabe), drei-zehn.**
 114 **I: Und was brauchst du dann noch (legt den Vorrat an Rechengeld bereit)?**
 115 **C: 1, 2, 3, 4 (nimmt einzeln 4 Einermünzen).**
 116 **I: 4 Einer (schiebt übriges Rechengeld zur Seite).**
 117 **C: Das sind einmal 200 (schiebt 2 Hunderterscheine zur Seite).**
 118 **I: Das (zeigt auf die Zehnerscheine) sind 13, oder?**
 119 **C: Ja. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 (zählt einzeln Zehnerscheine von den 13 Scheinen weg; bildet daraus einen Stapel). Dann ist**
 120 **die Rechnung falsch, weil die (gibt die 10 Zehnerscheine zum Vorrat) tausch ich in einen Hunderter (nimmt einen**
 121 **Hunderterschein vom Vorrat), weil das jetzt schon 10 Zehner sind. Dann haben wir 300 (legt den gewechselten**
 122 **Hunderterschein zu den 2 bereits aufgelegten Hunderterscheinen dazu). Dann haben wir noch 30 Zehner (legt die 3 übrigen**
 123 **Zehnerscheine neben die 3 Hunderterscheine), und haben wir noch 4 Einer (ordnet die Einer neben die gelegten Scheine).**
 124 **I: Mhm.**
 125 **C: Und die Zahl lautet: dreihundert-vierunddreißig.**
 126 **I: Super, passt. Das hast du mir ganz toll erklärt (räumt gemeinsam mit C Rechengeld zur Seite). Die Hunderter legen**
 127 **wir auf den Hunderterstapel. Ok, dann machen wir jetzt etwas anderes. Den Stift kannst du einstweilen da hinüber**
 128 **legen. Den brauchen wir momentan nicht. Ich habe Steine mitgebracht (leert Steine auf den Tisch). Und dann habe**
 129 **ich auch Gläser mitgebracht (stellt 8 Gläser auf den Tisch). Jetzt möchte ich – und da helfe ich dir dabei –, dass wir**
 130 **in jedes Glas 10 Steine einfüllen. Ok?**
 131 **C: Ja.**

I: Und los geht's.

C: (schiebt 4 + 1 und 3 + 2 Steine jeweils mit 2 Händen zur Seite; füllt alle 10 Steine gemeinsam in ein Glas; zählt die nächste Zehnergruppe in Zweierschritten; zählt nächste Zehnergruppe in folgenden Teilmengen: 3+2+3+2; zählt die übrigen Zehnergruppen in Zweierschritten; keine Lippenbewegungen erkennbar)

I: Gut. Kannst du mir sagen (rückt alle 8 Gläser in einer Gruppe näher zu C), wie viele Steine das (zeigt auf die Gläser) sind?

C: (zählt in Einerschritten; zeigt immer mit dem Finger in je ein Glas; Lippenbewegung erkennbar) 80.

I: Ok. Kannst du es noch einmal laut zählen bitte?

C: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (zeigt dabei immer mit dem Finger in je ein Glas), das heißt: In jedem Glas (zeigt auf alle Gläser) sind 10 drinnen. 8 mal 10 ist 80.

I: Ok, gut. Jetzt stellen wir alles zu dir, also die Gläser und auch die anderen Steine (schiebt Gläser und Vorrat an einzelnen Steinen zu C). Und jetzt möchte ich bitte, dass du mir hierher (zeigt auf freie Fläche am Tisch) 25 Steine gibst.

C: (zählt 24 Steine in Zweierschritten durch Verschieben von je zwei Steinen vom Vorrat weg; ergänzt einen Stein; schiebt die gesamte Menge zu I; keine Lippenbewegung erkennbar; arbeitet flüssig)

I: Ok. Kannst du es mir auch so herlegen, dass ich das im Vorbeigehen auf einen Blick gleich sehen könnte, dass das 25 sind?

C: (ordnet die Steine in 5 Fünfergruppen an; innerhalb der Gruppen keine bewusst gewählte Struktur erkennbar; Gruppen liegen kreisförmig angeordnet) Weil 5 mal 5 ist 25, und wenn man 5 mal die Gruppen sieht, kann man sich denken, dass das fünf sind. Dann sieht man die Steine (zieht die Steine einer Fünfergruppe weiter auseinander), eine Gruppe ist 5, man kann eine Gruppe so sehen (ordnet die Steine einer Fünfergruppe in Kreisform an), und dann sieht man, dass es 5 sind (zeigt mit dem Finger einen Kreis über alle Gruppen), und das sind 25.

I: Ok, gut. Jemand anderer (nimmt 2 Gläser vom Vorrat und stellt sie zur Seite) hat mir die 25 einmal so gelegt (ergänzt 5 einzelne Steine vom Vorrat zu den 2 Gläsern). Kannst du mir erklären, was sich der dabei gedacht hat?

C: Also, er hat sich gedacht, man könnte von der Menge schätzen, vielleicht. Dass man, also, so (überlegt), ah! So ist es, dass man 5 (tippt mit dem Finger auf jeden Stein der Fünfergruppe), und noch einmal 5 (tippt erneut mit dem Finger auf jeden Stein der Fünfergruppe), 5 (tippt erneut mit dem Finger auf jeden Stein der Fünfergruppe) mal diese Zahl (zeigt auf die Fünfergruppe). 5 (umkreist die Fünfergruppe mit dem Finger) mal 5 (umkreist die Fünfergruppe mit dem Finger).

I: Aber – ich lege deine Menge einmal hier auf die Seite, ok (schiebt vom Kind gelegte Menge mit 25 Steinen zur Seite)?

C: (nickt)

I: Er hat mir das so hingegeben (stellt die 2 Gläser und 5 Steine in die Mitte), diese 2 Gläser und die 5.

C: Ah (nimmt die 2 Gläser näher zu sich), weil die in den Gläsern sind 2, das heißt 20 (zeigt auf die Gläser), und da sind 5 Steine (zeigt auf die 5 einzelnen Steine). Aber da muss man zuerst wissen, dass da (zeigt in die 2 Gläser) 10 drinnen sind.

I: Mhm, das hat er gewusst. Also er hat gewusst, dass da 10 drinnen sind.

C: (nickt; ordnet die 5 Steine kreisförmig an)

I: Ok, gut. Dann schieben wir das wieder zu dir (schiebt alle Gläser und Steine zu C). Und jetzt lege ich das her (schiebt 5 Gläser und 3 Steine zur Seite). Kannst du mir sagen, wie viel das ist, was ich da (zeigt auf die gelegte Menge) hergelegt habe?

C: (zögert kurz; überlegt, ob in Einerschritten oder Zweierschritten gezählt wird) 1, 2, 3, 4, 5 (zeigt mit dem Finger auf je ein Glas), 50, (flüstert 1, 2, 3), 53.

I: Ok. Kannst du mir hier daneben bitte 35 legen?

C: (zählt eine Fünfergruppe in Einerschritten vom Vorrat in die Hand und schiebt diese zur Seite; zählt 2 Zehnergruppen jeweils in Zweierschritten vom Vorrat weg; schiebt diese zur Fünfergruppe dazu; endet bei 25 Steinen)

I: Das sind 35.

C: (nickt)

I: Gut. Ich habe diese 2 Kärtchen (legt Ziffernkärtchen „35“ und „53“ untereinander auf den Tisch). Kannst du zu den zwei Mengen das richtige Kärtchen jeweils dazulegen?

C: (ordnet die Ziffernkärtchen zügig richtig zu)

I: Ok. Was hat diese 3 (zeigt auf die Einerstelle von 53) jetzt mit dieser Menge hier (zeigt auf die Menge aus 5 Gläsern und 3 Steinen) zu tun?

C: Die 3 (nimmt die 3 einzelnen Steine in die Hand) hat mit den 3 Einern zu tun. Das sind 3 Einer.

I: Ok. Und die 5 (zeigt auf die Zehnerstelle von 53)?

C: Und die 5 sind die Zehner, die in den Gläsern sind (zeigt auf die Gläser).

I: Gut. Und was hat jetzt die Ziffer (zeigt auf die Zehnerstelle von 35) mit deiner, mit den 35 hier zu tun (zeigt auf die Menge aus 25 Steinen)?

C: Ähm, weil das sind 35 Steine und das ist die Anzahl der Steine. Weil, wenn man jetzt 5 weggeben würde (schiebt 5 Steine zur Seite), wären es nur noch mehr 30. Und das sind zwa, 30 (schiebt die übrigen 20 Steine zu einer Gruppe enger zusammen) und das (zeigt auf die Fünfergruppe) sind 5, 35.

I: Ok. Könntest du das auch so legen, dass man diese Ziffern (zeigt auf die Zehnerstelle und Einerstelle von 35) gut erkennen kann? Dass man sieht, wo diese 3 (zeigt auf die Zehnerstelle von 35) ist und wo diese 5 (zeigt auf die Einerstelle von 35) sind?

C: (bildet in Zweierschritten aus den 20 Steinen 2 Zehnergruppen; zählt nach; nimmt weitere 10 Steine in Zweierschritten vom Vorrat) Jetzt sind es 30. Vorher waren es 25 (ordnet die 5 einzelnen Steine kreisförmig an).

I: Mhm. Und wo sieht man jetzt diese 3 (zeigt auf die Zehnerstelle von 35)? Also was hast diese 3 mit der Menge zu tun?

C: 3 sieht man da (zeigt nacheinander auf die 3 Zehnergruppen) und die 5 sieht man hier (zeigt auf die Fünfergruppe). Das sind 5 Steine und da (zeigt erneut nacheinander auf die 3 Zehnergruppen) sieht man die 3 gleichen Mengen.

I: Ok. Und das (zeigt auf eine Zehnergruppe) sind dann wie viele?

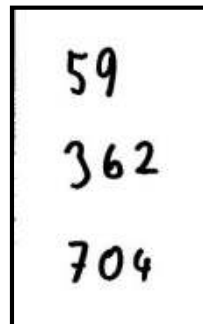
C: Das sind 10 (zeigt auf die erste Zehnergruppe), das heißt, alle zusammen sind 30.

I: Ok, gut. Super. Dann können wir die Steine alle wieder zurück in den Kübel geben (räumt gemeinsam mit C Steine und Gläser weg). Meine nächste Frage: Ich habe hier einen Eierkarton (legt Zehnerkarton für Eier auf den Tisch). Da passen 10 Eier hinein (öffnet den Karton), ok)

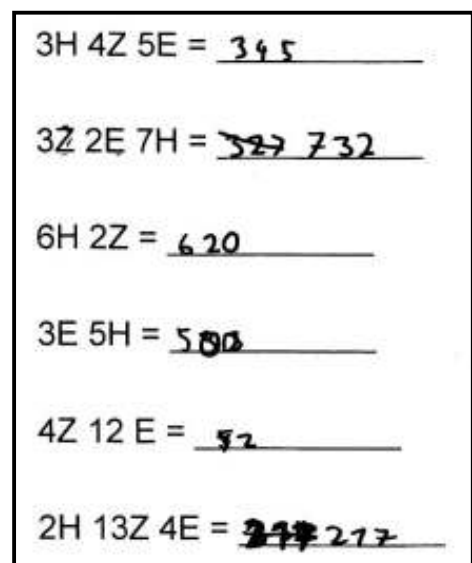
C: (nickt)

- 205 **I: Und ein Bauer hat in seinem Stall (legt Ziffernkärtchen „43“ auf den Tisch und zeigt darauf) 43 Eier gefunden. Wie**
 206 **viele Zehnerkartons kann er jetzt vollmachen?**
 207 C: 4, und 3 Eier bleiben ihm über.
 208 **I: Woher weißt du das so schnell?**
 209 C: Weil jede 4 (zeigt auf die Zehnerstelle von 43) vorne bedeutet ein Zehner. Und das sind dann 4 Zehner, das heißt, 4 solche
 210 (nimmt Zehnerkarton in die Hand) Packungen, weil genau 10 Stück reinpassen. Und 3 bleiben ihm dann über.
 211 **I: Ok. Und jetzt (räumt Ziffernkärtchen „43“ weg; legt Ziffernkärtchen „123“ auf den Tisch) hat ein großer Bauer – der**
 212 **hat einen riesengroßen Hühnerstall – der hat 123 Eier gefunden. Wie viele Zehnerkartons kann er vollmachen?**
 213 C: (nimmt Ziffernkärtchen „123“ zu sich und blickt konzentriert darauf) Er kann, (langgezogen; überlegt 13 Sekunden und blickt
 214 dabei auf das Ziffernkärtchen) 12.
 215 **I: Mhm. Wie bist du darauf gekommen?**
 216 C: Ich bin darauf gekommen, ähm, 10 mal 10 ist Hundert. Das heißt (zeigt auf die Hunderterstelle von 123), er kann mal 10
 217 vollfüllen. Und dann bleiben ihm 20 (zeigt auf die Zehnerstelle von 123), kann er mit 2 vollfüllen. Und das ist dann 12. Und 3
 218 bleiben ihm übrig.
 219 **I: Ok, gut. Genug mit Eiern gerechnet (räumt Zehnerkarton und Ziffernkärtchen weg). Jetzt habe ich eine andere Frage,**
 220 **und zwar: Hans hat schon (legt Ziffernkärtchen „47“ auf den Tisch) 47 Euro gespart, ja?**
 221 C: (nickt)
 222 **I: Und er möchte sich einen Elektrobaukasten kaufen (legt Ziffernkärtchen „87“ auf den Tisch), und dieser Baukasten**
 223 **kostet 87 Euro, ja?**
 224 C: 40 Euro braucht er noch.
 225 **I: Und woher weißt du das so schnell, bevor ich die Frage stelle?**
 226 C: Weil die Siebener (zeigt auf die Einerstellen von 87 und 47) sind beide gleich. Das heißt, bei den Einern muss man nichts
 227 dazugeben. Und 4 plus wie viel ist 8? Ist 4. Das heißt, 4 sind, er braucht noch 4, 40 Euro dazu.
 228 **I: Aber jetzt hast du gesagt: 4 plus wie viel ist 8. Aber woher weißt du dann, dass es 40 ist?**
 229 C: Ich hab einfach die Nuller weggegeben (deckt die Einerstellen von 87 und 47 ab). Das machen wir auch immer bei der
 230 Hausübung manchmal, dass es leichter wird, und dann rechnen wir es mit kleinen Zahlen.
 231 **I: Mhm.**
 232 C: Dass es dann leichter geht, weil die kleinen Zahlen kennt jeder, und dann kann man es leichter machen. Und man gibt
 233 einfach am Ende der Rechnung, gibt man einfach die Nuller wieder dazu.
 234 **I: Mhm, ok, gut (räumt Ziffernkärtchen weg). Und der Herr Lehrer, der möchte sich ein I-Pad kaufen. Und dieses I-Pad**
 235 **kostet (legt Ziffernkärtchen „579“ auf den Tisch) 579 Euro. Und er hat schon 279 gespart (legt Ziffernkärtchen „279“**
 236 **auf den Tisch). Wie viel braucht er noch?**
 237 C: Ähm, bei den Einern braucht er nichts mehr (schiebt Ziffernkärtchen näher zusammen), bei den Zehnern auch nicht mehr,
 238 aber bei den Hundertern braucht er noch 300.
 239 **I: Mhm, ok, gut. Dann meine nächste Frage, und zwar: Kannst du bitte von 357 in Zehnerschritten rückwärtszählen?**
 240 C: 357? Ähm, (blickt verzwick; überlegt 6 Sekunden) dreihundert-siebenund-fünfzig (langgezogen gesprochen; überlegt),
 241 dreihundert (langgezogen; überlegt) siebenund-vierzig, 337, 327, dreihundert-sieben, dreihundert, 297, 287, 267, 287.
 242 **I: Ok, danke.**
 243 C: Und so weiter (seufzt; lacht).
 244 **I: Und von 243 rückwärts?**
 245 C: Zweihundert, zweihundert-dreiund-vierzig (langsam; schließt dabei die Augen), ähm (überlegt 6 Sekunden), zweihundert
 246 (überlegt 12 Sekunden; Zählbewegungen in Einzelschritten mit Lippen und Fingern erkennbar) zweihundert-zweieunddreißig,
 247 zweihundert-zweieundzwanzig, zweihundert-zwei, ähm (überlegt), 192, 182, 172.
 248 **I: Mhm, ok, danke. Und könntest du mir das bitte auch einmal noch aufschreiben (legt AB Zahlenstrahl auf den Tisch)?**
 249 **Von 357 (zeigt auf die Startzahl) rückwärts, ok?**
 250 C: (schreibt 347 in der Reihenfolge HZE in das nächste Feld)
 251 **I: Und auch dazu sagen, wie die Zahl heißt, bitte.**
 252 C: 347, dreihundert-siebenund-dreißig, dreihundert-siebenund-zwanzig, dreihundert-sieb-zehn (schreibt alle Zahlen korrekt
 253 während des Sprechens in der Reihenfolge HEZ auf; stockt nach Notieren der Hunderterstelle kurz und blickt zurück zur
 254 davor eingetragenen Zahl), dreihundert-sieben (schreibt 307 in der Reihenfolge HZE auf; stockt nach der Hunderterstelle
 255 ebenfalls kurz), zweihundert-siebenundneunzig, zweihundert-siebenundachtzig, zweihundert-siebenund-siebzog,
 256 zweihundert-siebenund-sechzig (schreibt alle Zahlen korrekt während des Sprechens in der Reihenfolge HEZ auf; stockt
 257 nach Notieren der Hunderterstelle kurz und blickt zurück zur davor eingetragenen Zahl).
 258 **I: Super. Danke schön (beschriftet Zahlenstrahl und räumt ihn weg). Dann habe ich noch eine andere Frage, und zwar:**
 259 **Oma Herta hat 2 Enkelkinder. Und sie möchte jedem Kind gleich viel Geld zu Weihnachten schenken.**
 260 C: (nickt)
 261 **I: Und sie hat daheim aber nur einen Hunderteuroschein und 4 Zehneuroscheine. Was könnte sie machen?**
 262 C: (prompt) 70 Euro jedem geben.
 263 **I: Ok. Aber sie hat ja nur einen Hunderteuroschein und 4 Zehneuroscheine.**
 264 C: Hmm (überlegt).
 265 **I: Wie könnte sie das machen?**
 266 C: Sie könnte wohin gehen und Geld umwechseln – den Hunderte auf zwei Fünfiger.
 267 **I: Mhm.**
 268 C: Und die Vierziger sind eh zwei Zwanziger, weil es gibt keinen Vierzigerschein.
 269 **I: Mhm.**
 270 C: Und dann bekommt jedes Kind 70 Euro.
 271 **I: Ok, super. Und dann kommen wir jetzt noch zu meiner letzten Aufgabe. Was ist die Hälfte von 4?**
 272 C: 2.
 273 **I: Und die Hälfte von 40?**
 274 C: 20.
 275 **I: Und woher weißt du das so schnell?**
 276 C: Weil es das gleiche ist, halt nur mit Nullen.
 277 **I: Ok. Und die Hälfte von 90?**

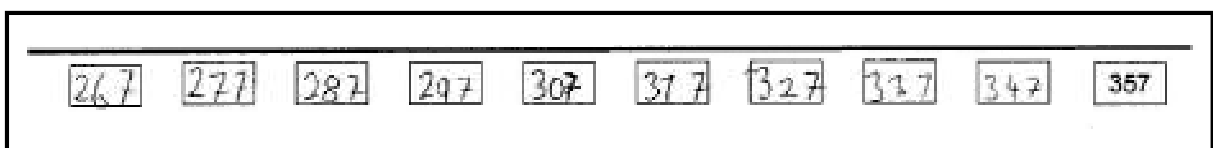
- 278 C: Die Hälfte von 90 (*überlegt*). Ähm, das geht nicht, weil es ist eine unge – es würde schon gehen. 5 mal 9, das ist die Hälfte
 279 von 90 (*überlegt*). Und das ist (*flüstert rhythmisch; streckt dabei einzeln nacheinander 4 Finger aus*) 45. Aber bei den Einern
 280 geht es nicht, weil sonst müsste man in den Minusraum gehen, weil 9 ist eine ungerade Zahl und die kann man nicht teilen.
 281 **I: Ok. Aber jetzt hast du mir gerade gesagt, die Hälfte von 9 ist 5 mal 9, ist 45. Und jetzt sagst du mir aber, dass man 90**
 282 **gar nicht teilen kann.**
 283 C: 90 kann man teilen, aber 9 nicht.
 284 **I: Achso, 9 kann man nicht teilen, ok.**
 285 C: Weil 9 ist eine ungerade Zahl, und da gibt's keine unten mehr. Da gibt's nur noch mehr bis 8 die Zahlen und die kann man
 286 nicht 5 mal machen, weil das wär schon wieder 90, und nicht 9.
 287 **I: Ok, aber du hast gemeint: 9 kann man nicht teilen, aber 90 ...**
 288 C: ... 90 kann man teilen, aber 9 nicht.
 289 **I: Ok, gut. Und was ist die Hälfte von 200?**
 290 C: 100.
 291 **I: Ok. Und die Hälfte von 600?**
 292 C: 300.
 293 **I: Und woher weißt du das so schnell?**
 294 C: Weil die Hälfte von 6 3 ist.
 295 **I: Mhm, ok. Und was ist die Hälfte von 500?**
 296 C: Die Hälfte von 500 (*überlegt kurz*) ist 250.
 297 **I: Und woher hast du das jetzt so schnell gewusst?**
 298 C: Weil 5 mal 5 ist 25, was wir vorher mit den Steinen aufgelegt haben, und das, und das heißt, dass, ähm, 500 ist das gleiche,
 299 halt nur mit, mit einem Nuller, mit einem Nuller mehr dran. Man gibt immer, wenn man rechnet, einen Nuller weg. Das ist,
 300 wenn dann 500, wäre das dann 50, wenn man einen Nuller weggeben würde. Und dann 50, die Hälfte von 50 ist 25. Und
 301 dann muss man den Nuller bei 500 wieder dazugeben und einen bei 25 dazugeben.
 302 **I: Mhm, ok. Und die Hälfte von 700?**
 303 C: Ähm, die Hälfte von 700 (*überlegt*) 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35 (*flüsternd; tippt dazu rhythmisch einzeln insgesamt 7 Finger auf*
 304 *ihre Backe bzw. auf den Tisch*), füü (*überlegt*) 350.
 305 **I: Ok. Und wie hast du das gerechnet?**
 306 C: Also, immer die Hälfte davon ist immer 5 mal. Und das, und 5 mal 7 (*tippt rhythmisch einzeln insgesamt 7 Finger auf ihre*
 307 *Backen; macht dazu rhythmisch Lippenbewegungen der Zahlen der Fünferreihe*) drei (*stockt; wiederholt Zählvorgang*)
 308 fünfunddreißig, glaub ich, ja fünfunddreißig. Und deswegen geb ich da auch eine Null hin, wie vorher bei den 250.
 309 **I: Ok, super. Da waren alle Fragen, die ich dir stellen wollte. Danke vielmals, dass du mir geholfen hast und so toll**
 310 **mitgemacht hast.**
 311



Kind C – geschriebene Zahlen



Kind C – AB 3



Kind C – AB Zahlenstrahl

8.5 Interview mit Kind D

Interview Nr. 1
Kind D
Datum: 26.09.2012
Beginn: 08:16:46
Ende: 10:04:12
Dauer: 00:21:29

- 1 I: Das Wichtigste heute ist, immer wenn ich dir Fragen stelle oder eine Rechnung sage: Heute interessiert mich
2 hauptsächlich, wie du zu der Lösung kommst und wie du denkst und wie du das gemacht hast.
3 D: Ja.
4 I: Es interessiert mich nicht so, ob das richtig oder falsch ist. Das werde ich dir auch nicht sagen, ja?
5 D: Mhm.
6 I: Ich will nur wissen, wie du das gemacht hast und wie du denkst, gut?
7 D: Ja.
8 I: Die erste Aufgabe: Ich werde dir jetzt 3 Zahlen ansagen und du schreibst sie bitte da auf den Zettel. Und du darfst
9 ruhig groß schreiben, damit ich das gut lesen kann.
10 D: Ja.
11 I: 59.
12 D: (schreibt zuerst 9; zögert kurz und bemerkt den Irrtum; schreibt 5 davor)
13 I: 362.
14 D: (schreibt 362 in der Reihenfolge HZE; zögert bei der Zehnerstelle kurz)
15 I: Und 704.
16 D: (schreibt 704 zügig in der Reihenfolge HZE auf)
17 I: Super. Die erste Aufgabe ist schön gelöst. Meine zweite Frage (legt Ziffernkärtchen „246“ auf den Tisch): Ich habe
18 hier eine Zahl. Kannst du sie mir bitte vorlesen?
19 D: 246.
20 I: Und was bedeutet denn der Vierer (zeigt auf die Zehnerstelle von 246) in dieser Zahl?
21 D: Die Zehnerstellen.
22 I: Die Zehnerstelle. Und was heißt das, wenn da eine 4 steht?
23 D: (überlegt) Dass es – 46 – also es kommt drauf an, welche Zahl ist, und dann ist halt das Ergebnis.
24 I: Mhm. Und die 4 (zeigt auf die Zehnerstelle von 246) heißt jetzt was genau?
25 D: Die Zehnerstelle von der Zahl.
26 I: Ok, passt. Dann habe ich jetzt eine andere Frage. Den Stift kannst du einstweile auf die Seite legen, den brauchen wir
27 jetzt momentan nicht mehr. Ich habe hier (legt Preisliste von Fahrrädern auf den Tisch) eine Preisliste von
28 Fahrrädern. Ja?
29 D: Ja.
30 I: Kannst du mir sagen, welches das teuerste Fahrrad ist?
31 D: (überlegt kurz) Das da (zeigt auf 653).
32 I: Ok. Und wie bist du darauf gekommen - so schnell?
33 D: Weil die Zahlen (zeigt auf andere Zahlen der Preisliste) alle weniger sind als das, die Zahl (zeigt auf 653), die.
34 I: Und woher hast du gewusst, dass die weniger sind?
35 D: Weil 600 (zeigt auf die Hunderterstelle von 653) ist größer als 500 (zeigt auf die Hunderterstelle von 563) und die 50 (zeigt
36 auf die Zehnerstelle von 653) ist größer als die 30 (zeigt auf die Zehnerstelle von 635).
37 I: Ok gut. Das hast du mir super erklärt (räumt die Preisliste weg). Dann habe ich noch eine ähnliche Frage (legt
38 Ziffernkärtchen „305“ und „299“ auf den Tisch): Kannst du mir die zwei Zahlen bitte vorlesen.
39 D: 305 und 299.
40 I: Und welche ist da größer?
41 D: Die (zeigt auf 305).
42 I: Und wieso hast du das so schnell gewusst?
43 D: Weil 300 (zeigt auf 305) größer als 2 ist.
44 I: 300 ist größer als 2? Wo siehst du da die zwei (zeigt auf das Ziffernkärtchen 299)?
45 D: Als 200 (zeigt auf die Hunderterstelle von 299), weil 3 ist eben größer als 2.
46 I: Ok, gut. Hast du mir toll erklärt. Dann habe ich noch eine ähnliche Frage (legt Ziffernkärtchen „52“ und „25“ auf den
47 Tisch): Kannst du mir die beiden Zahlen bitte vorlesen?
48 D: 52 und 25.
49 I: Und welche ist da größer?
50 D: 52 (zeigt auf das Ziffernkärtchen 52).
51 I: Mhm. Und wieso hast du das so schnell gewusst?
52 D: Weil 50 (zeigt auf die Zehnerstelle von 52) ist auch größer als 2 (zeigt auf die Zehnerstelle von 25), als 20.
53 I: Als 20. Ok, super. Gut. Dann habe ich die nächste Aufgabe (legt AB 3 auf den Tisch), und zwar: Kennst du diese
54 Symbole (zeigt auf die Aufgabe 3H 4Z 5E)? Weißt du, was die bedeuten?
55 D: Ja.
56 I: Und zwar?
57 D: Hunderter, Zehner und Einer (zeigt auf die Aufgabe).

- 58 I: Super. Und jetzt möchte ich, dass du immer hier daneben (*zeigt auf die freien Plätze zum Ausfüllen*) die Zahl
 59 schreibst und sie mir auch laut vorliest.
 60 D: Ja.
 61 I: Du kannst dir wieder diesen dicken Stift nehmen, dass wir das gut lesen können.
 62 D: (*löst Aufgabe 3H 4Z 5E = 345 zügig*) Dreihundert-fünfundvierzig.
 63 I: Mhm.
 64 D: (*löst Aufgabe 3Z 2E 7H = 327 zügig*) 327.
 65 I: Wie bist du darauf gekommen?
 66 D: Weil das sind die ... (*zeigt auf die Angabe; überlegt*), ah (*überlegt; streicht 327 durch; schreibt 732 daneben; zögert bei der*
 67 *Einerstelle kurz*).
 68 I: Ok. Wie bist du darauf jetzt gekommen?
 69 D: Weil die Hunderter (*zeigt auf 7H*) kommen zuerst, weil es die größere Zahl ist.
 70 I: Mhm.
 71 D: (*löst Aufgabe 6H 2Z = 62*) 602, (*schauf auf die Angabe*) achso (*fügt an der Zehnerstelle eine 0 ein*), 602.
 72 I: Mhm. Was bedeutet die Null da in der Mitte?
 73 D: Das ist die Null für die 600. Wenn keine dri ..., wenn keine Zehnerzahl drinnen ist.
 74 I: Wenn keine Zehnerzahl drinnen ist.
 75 D: (*löst Aufgabe 3E 5H = 503; zögert nach der Hunderterstelle kurz*) Fünfhundert-drei.
 76 I: Mhm.
 77 D: (*überlegt 10 Sekunden; löst Aufgabe 4Z 12E = 412; zögert nach Notieren der 4 kurz; überlegt nach Aufschreiben der*
 78 *gesamten Zahl weitere 10 Sekunden*)
 79 I: Wie bist du darauf jetzt gekommen? Wie heißt die Zahl, die du geschrieben hast?
 80 D: (*überlegt*) 412.
 81 I: Mhm. Und wie bist du darauf gekommen?
 82 D: Weil, es gibt kein Hundert, deswegen muss man das (*zeigt auf 12E*) dazurechnen (*zeigt auf die gesamte Angabe*).
 83 I: Mhm.
 84 D: (*löst Aufgabe 2H 13Z 4E = 2134*)
 85 I: Mhm. Kannst du mir die Zahl vorlesen?
 86 D: Zweitausend, nein, Einundzwanzigtausendvierunddreißig.
 87 I: Ok. Dann habe ich jetzt eine andere Frage (*legt AB 3 zur Seite*). Wir werden uns die Aufgabe, die eine (*zeigt auf 4Z*
 88 *12E*), noch einmal anschauen - und zwar mit Material (*legt Rechengeld auf den Tisch*). Ich habe hier Rechengeld
 89 vorbereitet. Und es steht hier, wir haben 4 Zehner (*legt 4 Zehner des Rechengeldes vor D auf den Tisch*) und 12
 90 Einer (*legt 12 Einer des Rechengeldes dazu*). Kannst du mir sagen, wie viel das ist, was hier liegt (*zeigt auf das*
 91 *gelegte Rechengeld*)?
 92 D: (*überlegt*) 40 und, und 4, 40 und 12.
 93 I: 40 und 12. Kann man das auch irgendwie zusammenlegen, sodass es nur eine Zahl ist?
 94 D: Hmm.
 95 I: Kannst du das so zählen, dass du mir sagen kannst, wie viel es insgesamt ist?
 96 D: (*überlegt 10 Sekunden; blickt dabei immer wieder auf beide Teilmengen*) Ähm, 52.
 97 I: Mhm. Wie bist du darauf jetzt gekommen?
 98 D: Ich hab von da (*zeigt auf die Einer*) 10 genommen und dann bleiben 2 übrig (*zeigt auf 2 Einer*). Das (*zeigt auf die Zehner*) ist
 99 40, plus 10 (*schiebt 10 Einer zur Seite*) ist 50 und die 2 (*zeigt auf die 2 übrigen Einer*) noch dazu.
 100 I: Mhm. Glaubst du, kannst du das (*zeigt auf die gelegte Menge*) auch so legen, dass ich das, wenn ich jetzt vorbei
 101 gehe, ganz schnell sehen kann, wie viel da liegt? Kann man da irgendetwas ändern, dass das so liegt, dass ich das
 102 ganz schnell erkennen kann? Du hast ja auch noch das (*legt übriges Rechengeld auf den Tisch*).
 103 D: (*ordnet die ersten 3 Zehner in einer Spalte an; schiebt den vierten Zehner dazu; nimmt einen fünften Zehner vom Vorrat und*
 104 *legt ihn in der Spalte dazu; schiebt 2 Einer der 12 Einer dazu*)
 105 I: Mhm, super. Und diese da (*zeigt auf die übrigen 10 Einer der 12 Einer*)? Brauchen wir die auch noch?
 106 D: Ja. Nein, die, die braucht wir jetzt nicht mehr (*schiebt die 10 Einer zur Seite*), weil (*zeigt auf den fünften Zehner in der Spalte*)
 107 noch eine Zehn da ist.
 108 I: Ok. Also du hast die (*zeigt auf die 10 Einer*) getauscht.
 109 D: Ja.
 110 I: Mhm, super. Jetzt kann ich es wirklich auf einen Blick erkennen. Dann brauch wir das Rechengeld jetzt nicht mehr
 111 (*räumt Rechengeld weg*). Jetzt haben wir einmal genug mit Zahlen gemacht. Jetzt habe ich eine andere Aufgabe:
 112 Und zwar (*leert Steine auf den Tisch*) habe ich hier Steine mitgebracht und Gläser (*stellt 8 Gläser auf den Tisch*).
 113 Und ich möchte jetzt, dass wir in jedes Glas 10 Steine einfüllen, ja?
 114 D: Mhm.
 115 I: Ich helfe dir dabei und wir füllen einfach in jedes Glas 10 Steine ein. Und da, wo schon 10 Steine drin sind, die stellen
 116 wir dann da hinüber, ok?
 117 D: Ja (*zählt die Steine einzeln in das Glas; stockt nach 4 Steinen kurz; legt 2 Steine gleichzeitig hinein; fährt einzeln fort; schiebt*
 118 *das Glas mit 10 Steinen zur Seite; schiebt eine kleine Menge Steine zur Seite; zählt sie einzeln ab – leichte*
 119 *Lippenbewegungen erkennbar; schiebt einen Stein, der zu viel war, zur Seite; füllt 10 Steine vorsichtig in das zweite Glas;*
 120 *zählt in Zweiserschritten mit beiden Händen 10 Steine vom Vorrat weg und füllt sie in ein Glas; zählt die Steine für das letzte*
 121 *Glas ebenfalls in Zweiserschritten vom Vorrat weg*).
 122 I: Ok, gut. Wenn wir diese Gläser hier anschauen (*rückt Gläser näher zusammen*), kannst du mir sagen, wie viele Steine
 123 das sind?
 124 D: (*prompt*) 80.
 125 I: Und wie bist du da so schnell draufgekommen?
 126 D: Weil, ich hab die Gläser gezählt, und ich weiß, dass da 10 drinnen sind.
 127 I: Und wie hast du gezählt? Kannst du mir einmal laut vorzählen, wie du das gezählt hast?
 128 D: 2, 4, 6, 8 (*zeigt jeweils auf 2 Gläser*).
 129 I: Ok. Und dann weißt du, dass das 80 sind.
 130 D: Ja.

- 131 I: Gut. Jetzt schieben wir das alles einmal zu dir (*schiebt Gläser und Vorrat an Steinen zu D*). Kannst du mir jetzt bitte
 132 daher (*zeigt auf freien Platz vor I*) 25 Steine geben?
 133 D: (*schiebt 2 Gläser und 5 Steine zur Seite*)
 134 I: Ok, sehr gut. Jetzt lege ich dir ein paar Steine her.
 135 D: Mhm.
 136 I: (*schiebt 5 Gläser und 3 Steine zur Seite*) Wie viele Steine sind das?
 137 D: (*prompt*) 53.
 138 I: Ok. Jetzt lassen wir die hier liegen (*schiebt Menge zur Seite*). Kannst du mir da daneben bitte 35 Steine legen?
 139 D: (*schiebt 1 Stein vom Vorrat zur Seite; schiebt 4 weitere Steine dazu; zählt die gesamte Menge; schiebt einen weiteren Stein*
 140 *dazu; zählt wieder die gesamte Menge; ergänzt mit einzelnen Steinen auf 10 Steine, die ungeordnet liegen bleiben; stellt 2*
 141 *Gläser dazu; zögert dabei, das dritte Glas ebenfalls dazuzustellen*) 35?
 142 I: Mhm.
 143 D: (*stellt das dritte Glas wieder zurück; schiebt noch 4 einzelne Steine dazu; schiebt einen weiteren Stein dazu und bildet eine*
 144 *Fünfergruppe; schiebt die Zehnergruppe einzelner Steine zwischen den beiden Gläsern enger zusammen*)
 145 I: Mhm, ok. Und kannst du mir das auch so legen, dass ich auf einen Blick erkennen kann, dass das 35 sind?
 146 D: Mhm (*ersetzt, ohne zu zögern, die 10 einzelnen Steine durch ein Glas; bildet daneben wieder eine Fünfergruppe einzelner*
 147 *Steine*).
 148 I: Ok. Und jetzt habe ich noch Kärtchen dazu (*legt Ziffernkärtchen „35“ und „53“ zwischen die beiden Mengen auf den*
 149 *Tisch*). Kannst du jetzt das richtige Kärtchen zur richtigen Menge legen, bitte?
 150 D: (*schiebt das Ziffernkärtchen „53“ zur Menge 35; zögert, überlegt und blickt auf beide Mengen; korrigiert und ordnet die*
 151 *Ziffernkärtchen richtig zu*)
 152 I: Mhm, ok. Und was hat denn jetzt zum Beispiel diese 3 (*zeigt auf die Einerstelle von 53*), die da steht, mit der Menge
 153 hier (*zeigt auf die gelegte Menge aus 5 Gläsern und 3 Steinen*) zu tun?
 154 D: (*prompt*) Mit dem (*nimmt die 3 einzelnen Steine in die Hand*).
 155 I: Das sind die.
 156 D: 3 Einer.
 157 I: Und was hat diese 3 (*zeigt auf die Zehnerstelle von 35*) mit der Menge hier (*zeigt auf die gelegte Menge aus 3 Gläsern*
 158 *und 5 Steinen*) zu tun?
 159 D: Da (*schiebt die 3 Gläser näher zusammen*) sind 3 Zehner.
 160 I: Da sind 3 Zehner. Super. Dann können wir die Steine wieder auf die Seite legen.
 161 D: (*räumt gemeinsam mit I Steine und Gläser und Ziffernkärtchen weg*)
 162 I: Danke. Jetzt habe ich eine ganz andere Frage. Und zwar: Du weißt ja, dass man Einer in Zehnerkartons kaufen kann
 163 (*legt Zehnerkarton auf den Tisch*).
 164 D: Ja.
 165 I: Da sind 10 Eier drin. Und ein kleiner Bauer hat in seinem Hühnerstall 43 Eier (*legt Ziffernkärtchen „43“ auf den Tisch*)
 166 gefunden. Wie viele Zehnerkartons kann er vollfüllen damit?
 167 D: Hmm (*überlegt*), 4 und 3 Eier.
 168 I: 4 und 3 Eier. Und wie bist du darauf gekommen?
 169 D: Weil das ein Zehnerkarton ist (*nimmt den Karton in die Hand*), und 4 mal 10 ist 40 und noch 3 Eier (*zeigt auf die Einerstelle*
 170 *von 43*) sind 43.
 171 I: Ok, super. Und jetzt habe ich noch eine andere Frage: Ein großer Bauerbetrieb hat 123 Eier gefunden (*legt das*
 172 *Ziffernkärtchen „123“ auf den Tisch*). Wie viele Zehnerkartons kann der jetzt füllen (*zeigt auf Zehnerkarton*)?
 173 D: (*überlegt 9 Sekunden*) 12 und 3 Eier.
 174 I: 12 und 3 Eier. Und wie bist du darauf gekommen?
 175 D: Weil, ähm, 12 mal 10 ist 120 und noch 3 Eier sind dann 123 (*spricht langsam und überlegt*).
 176 I: Super. Dann haben wir die Eieraufgabe auch gelöst (*räumt Zehnerkarton weg*). Dann habe ich noch eine andere
 177 Frage, und zwar: Hans hat schon 47 Euro gespart (*legt Ziffernkärtchen „47“ auf den Tisch*). Und er möchte sich
 178 einen Elektrobaukasten kaufen, der 87 Euro kostet (*legt Ziffernkärtchen „87“ auf den Tisch*). Wie viel Euro muss er
 179 jetzt noch sparen?
 180 D: (*prompt*) 40.
 181 I: Und wieso weißt du das so schnell?
 182 D: Weil 8 (*zeigt auf Zehnerstelle von 87*) ist das Doppelte von 4 (*zeigt auf Zehnerstelle von 47*).
 183 I: 8 ist das Doppelte von 4. Und woher weißt du dann, dass es 40 sind?
 184 D: (*überlegt kurz*) Weil 47 (*zeigt auf das Ziffernkärtchen*), das hört man schon, dass eine 4 (*zeigt auf die Zehnerstelle von 47*),
 185 und 87 (*zeigt auf die Zehnerstelle von 87*) ist – muss man einfach noch (*zeigt auf die Zehnerstelle von 47*) 40 dazugeben
 186 (*zeigt auf die Zehnerstelle von 87*) und dann hat man 87.
 187 I: Ok. Super erklärt. Und jetzt habe ich noch eine andere Frage: Der Herr Lehrer möchte sich ein I-Pad kaufen und das
 188 kostet 579 Euro (*legt Ziffernkärtchen „579“ auf den Tisch*). Und (*legt Ziffernkärtchen „279“ auf den Tisch*) der Herr
 189 Lehrer hat schon 279 Euro gespart. Wie viele Euro braucht er noch?
 190 D: (*prompt*) 300 Euro.
 191 I: Und woher weißt du das so schnell?
 192 D: Weil drei, 279 (*zeigt auf das Ziffernkärtchen*) plus 300 ist 579 (*zeigt auf das Ziffernkärtchen*).
 193 I: Ok, super. Gut. Dann habe ich jetzt noch eine andere Frage. Wir sind auch gleich fertig. Kannst du bitte von 357
 194 rückwärtszählen in Zehnerschritten.
 195 D: (*überlegt*)
 196 I: Weißt du was es bedeutet in Zehnerschritten zu zählen?
 197 D: Ja.
 198 I: Ok. Kannst du von 357 rückwärtszählen?
 199 D: (*überlegt*) 356 (*blickt fragend zu I; überlegt*).
 200 I: In Zehnerschritten.
 201 D: (*überlegt; blickt fragend*)
 202 I: Kannst du von 350 in Zehnerschritten rückwärtszählen?
 203 D: (*überlegt*) 340, 330, 320, 300, drei, ähm, 290, 280, zweihundert-siebzig, 260.
 204 I: Ok, super. Das reicht schon. Und von 357 jetzt?

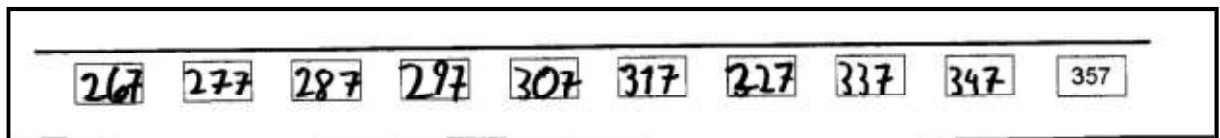
- 205 D: (*überlegt*) Dreihundert-vierundfünfzig, dreihundert-dreiundfünfzig (*stockend; zögerlich*).
 206 I: **Weißt du was: Schreib dir die Zahl einmal da (*legt Zettel und Stift bereit*) auf. Schreib dir 357 auf.**
 207 D: (*schreibt 357 in der Reihenfolge HZE; zögert nach der Hunderterstelle*)
 208 I: **Mhm. Und jetzt versuch es noch einmal, in Zehnerschritten rückwärts zu zählen.**
 209 D: Dreihundert-siebenundvierzig, dreihunderts, dreiund-sib (*blickt noch einmal auf die notierte Zahl 357*), 375, 374, 373,
 210 dreihundert-zweiundsiebzig.
 211 I: **Ok. Versuchen wir es noch einmal, dass du es dir aufschreibst. Ich habe einen Zahlenstrahl vorbereitet (*legt AB***
 212 **Zahlenstrahl auf den Tisch**). Und da (*zeigt am rechte Ende des Zahlenstrahls auf die Zahl 357*) ist die 357. Und dann
 213 **versuche, dass du es in Zehnerschritten rückwärts aufschreibst. Und lies mir die Zahl bitte auch immer vor.**
 214 D: (*trägt 347 in der Reihenfolge HZE in das nächste Feld ein*) 374, 347, (*schreibt die Zahl 337 in der Reihenfolge HZE in das*
 215 *nächste Feld; stockt an der Zehnerstelle begleitet durch das Aussprechen der Zahl kurz*) Dreihundertdrei, siebenunddreißig,
 216 (*schreibt 2 in das nächste Feld*) zweihundert, nein, (*schreibt 3 über 2*) dreihundert-siebenund-zwanzig (*stockend; schreibt*
 217 *parallel 27 in der Reihenfolge ZE => 327*), (*überlegt; schreibt 3 in das nächste Feld*) dreihundert (*überlegt*) sieb-zehn
 218 (*schreibt parallel 17 in der Reihenfolge ZE => 317*), dreihundert (*schreibt 3 in das Feld*) sie-sieben (*schreibt 07 in der*
 219 *Reihenfolge ZE => 307*), zweihundert-siebenundneunzig (*schreibt 297 in der Reihenfolge HZE; stockt kurz nach der*
 220 *Hunderterstelle; spricht die Einerstelle erst aus, wenn er diese schreibt*), zweihundertacht (*schreibt 2 und 8 in das Feld*),
 221 siebenundachtzig (*ergänzt 7 => 287*), zweihundertsiebundsiebzig (*schreibt zügig 277 in der Reihenfolge HZE*), und
 222 zweihundert-siebenundsechzig (*schreibt 267 in der Reihenfolge HZE; zögert nach der Hunderterstelle*).
 223 I: **Ok. Genug gezählt. Jetzt habe ich eine Frage, und zwar: Oma Herta möchte ihren zwei Enkelkindern zu Weihnachten**
 224 **jedem gleich viel Geld schenken.**
 225 D: Ja.
 226 I: **Und sie hat einen Hunderteuroschein und vier Zehneuroscheine. Was könnte sie jetzt machen?**
 227 D: Ähm (*überlegt*), ähm, jedem 70 Euro.
 228 I: **Mhm. Und wie kann sie das machen, wenn sie nur einen Hunderteuroschein hat (*deutet Schein mit den Händen an*)**
 229 **und vier Zehneuroscheine?**
 230 D: Sie wechselt den Hunderter gegen zwei Fünziger und gibt jedem zwei Vierziger, 40 Euro.
 231 I: **Also jedem 40 noch.**
 232 D: Ja.
 233 I: **Mhm. Wie viel ist das dann insgesamt?**
 234 D: Ähm, 140. Also zu jedem noch 20.
 235 I: **Mhm. Ok, gut. Und dann kommen wir schon zu meiner letzten Frage: Was ist die Hälfte von 4?**
 236 D: (*prompt*) 2.
 237 I: **Und die Hälfte von 40?**
 238 D: (*prompt*) 20.
 239 I: **Und die Hälfte von 90?**
 240 D: Geht nicht.
 241 I: **Geht nicht? Ok. Dann können wir das anders probieren (*legt 9 Zehnerscheine des Rechengeldes auf*).**
 242 D: (*zählt die Scheine nach*)
 243 I: (*legt übriges Rechengeld ebenfalls ins Blickfeld*) **Wie viele sind das jetzt (*zeigt auf die 9 Zehnerscheine*)?**
 244 D: 90.
 245 I: **Ok. Und wenn ich das jetzt auf 2 aufteilen möchte? Wie könnte ich das machen?**
 246 D: Hmm (*überlegt*).
 247 I: **Ein anderes Kind hat mir gesagt, das geht irgendwie.**
 248 D: (*überlegt; schiebt 4 Zehnerscheine auf die Seite; schiebt einen fünften Zehnerschein dazu; zögert und überlegt; schiebt den*
 249 *fünften Zehnerschein zurück in die Mitte; nimmt fünf Einer vom Vorrat und legt diese zu den vier Zehnerscheinen dazu;*
 250 *blickt kurz fragend zu I; schiebt den fünften Zehnerschein wieder zur Gruppe dazu; zögert und überlegt; schiebt den fünften*
 251 *Zehner zur Gruppe der übrigen 4 Zehnerscheine dazu; zögert und überlegt; schiebt den fünften Zehnerschein weg, nimmt 5*
 252 *Einermünzen vom Vorrat und legt diese zur Gruppe der übrigen 4 Zehnerscheine dazu*)
 253 I: **Mhm. Wie hast du das jetzt gemacht? Was ist mit dem Zehner, der da liegt (*zeigt auf den fünften Zehnerschein*)?**
 254 D: Den Zehner (*zeigt auf den gewechselten Zehnerschein*) hab ich statt zwei Fünfer (*zeigt auf eine Gruppe aus 5 Einern*). Und 5
 255 und 5 (*zeigt auf die beiden Gruppen aus 5 Einern*) ist 10, also ist da 90 gegeben. Und die zwei Vierer (*zeigt auf die beiden*
 256 *Vierergruppen aus 4 Zehnerscheinen*) ergeben 80, und, und halt noch mit denen (*zeigt auf die zwei Gruppen aus 5*
 257 *Einermünzen*) ist es 90.
 258 I: **Super. Und was ist jetzt dann die Hälfte von 90?**
 259 D: 45.
 260 I: **Ok, gut. Das war es auch schon. Danke vielmals.**

59
362
704
357

Kind D – geschriebene Zahlen

3H 4Z 5E = 345
 3Z 2E 7H = ~~327~~ 732
 6H 2Z = ~~612~~
 3E 5H = 503
 4Z 12 E = 412
 2H 13Z 4E = 2134

Kind D – AB 3



Kind D – AB Zahlenstrahl

8.6 Interview mit Kind E

Interview Nr. 3
Kind E
Datum: 26.09.2012
Beginn: 09:25:38
Ende: 10:04:36
Dauer: 00:38:58

- 1 I: Das Wichtigste heute: Egal, welche Frage ich dir stelle, oder welche Rechnung, ich werde nicht sagen, ob das richtig
2 oder falsch ist.
3 E: Ok.
4 I: Das ist heute nicht so wichtig. Sondern mir ist wichtig, wie du das gemacht hast. Ich werde dich oft fragen, wie du
5 das jetzt gerechnet hast, oder wie du darauf gekommen bist. Das interessiert mich heute besonders.
6 E: Mhm.
7 I: Gut. Die erste Aufgabe: Du hast da einen Zettel und einen Stift. Ich werde dir Zahlen sagen und du sollst diese Zahlen
8 bitte aufschreiben und du darfst ruhig groß schreiben, damit man das gut sieht.
9 E: Ok.
10 I: 59.
11 E: (schreibt 59 langsam und gewissenhaft in der Reihenfolge ZE)
12 I: Mhm. 362.
13 E: (überlegt). Untereinander, oder?
14 I: Untereinander, bitte ja.
15 E: (schreibt 3) 362?
16 I: Mhm.
17 E: (ergänzt 62 gewissenhaft in der Reihenfolge ZE)
18 I: Und 704.
19 E: (schreibt 704 langsam und gewissenhaft in der Reihenfolge HZE)
20 I: Das war die erste schwierige Aufgabe.
21 E: (lacht)
22 I: (legt Ziffernkärtchen „246“ auf den Tisch) Kannst du mir bitte diese Zahl vorlesen?
23 E: 246.
24 I: Und was bedeutet denn der Vierer da (zeigt auf die Zehnerstelle von 246)?
25 E: Ähm, also die Zehnerstelle.
26 I: Ok. Und was heißt das, wenn da (zeigt auf die Zehnerstelle von 246) ein Vierer steht?
27 E: Äh (lacht verlegen).
28 I: Wie viel ist das, wenn da (zeigt auf die Zehnerstelle von 246) ein Vierer steht?
29 E: Das, 24, wenn man die 6 dann weglässt.
30 I: Ok. Und wenn man die 2 weglassen würde (deckt die Hunderterstelle von 246 ab)?
31 E: Dann würde es 46 heißen.
32 I: Ok. Dann haben wir für die Stelle (zeigt auf die Zehnerstelle von 246) jetzt schon 4 und 40. Und, was glaubst du,
33 könnte passen, wenn da (zeigt auf die Zehnerstelle von 246) ein Vierer steht? Steht der da für 4 oder für 40?
34 E: Für 40.
35 I: Ok, und wieso?
36 E: (lacht) Weil, wenn, das könnte man jetzt nehmen, weil bei 246, man könnte jetzt auch den Vierer weglassen und könnte eine
37 Null hinschreiben. Das würde dann 406 heißen. Aber ...
38 I: 406 würde das dann heißen?
39 E: Ah, 206. Und, ähm, der Vierer (zeigt auf die Zehnerstelle von 246) ist halt der Zehner und dann sagt man Vierhundertsechs,
40 ähm, 246.
41 I: Ok, gut. Meine nächste Frage: Den Stift kannst du einstweilen auf die Seite legen, den brauchen wir erst nachher
42 wieder. Ich habe hier eine Preisliste von Fahrrädern (legt Preisliste von Fahrrädern auf den Tisch).
43 E: Ok.
44 I: Ja. Kannst du mir sagen, welches Fahrrad das teuerste ist?
45 E: Ähm (überlegt 7 Sekunden; zeigt auf die höchste Zahl).
46 I: Ok. Wie bist du darauf gekommen?
47 E: Ich habe mir zuerst einmal die Hunderterzahl beim, ähm, das teuerste herausgesucht. Da gibt's die 6 da (zeigt auf 653) und
48 die 6 (zeigt auf 635). Und dann hab ich mir die Zehner angeschaut, und da (zeigt auf 635) war es 3 und da (zeigt auf 653)
49 war es 5. Das war einmal das (zeigt auf 653) das Höchste. Dann hab ich mir die Einer angeschaut. Da (zeigt auf 635) war 5
50 und da (zeigt auf 653) war 3. Und dann war das (zeigt auf 653) das Höchste.
51 I: Obwohl bei der Einerstelle (zeigt auf 635) ...
52 E: Ein Dreier, da (zeigt auf 635) ein Fünfer und da (zeigt auf 653) ein Dreier war, aber der Zehner, der, der, der zählt mehr wie
53 der Einer, deswegen.
54 I: Gut. Ganz toll erklärt (räumt Preisliste weg; legt Ziffernkärtchen „305“ und „299“ auf den Tisch). Kannst du mir bitte
55 die zwei Zahlen vorlesen?
56 E: 305 und 299.
57 I: Und welche ist da größer?
58 E: Die 299.

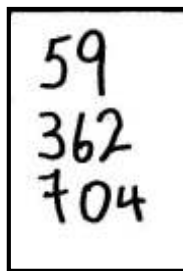
- 59 **I: Ist größer?**
60 E: Ja.
- 61 **I: Ok. Wieso?**
62 E: Weil, ähm, der Hunderter (*zeigt auf 299*), der ist - (*stockt; überlegt*) ups. Also 305 eigentlich (*lacht verlegen*).
- 63 **I: Mhm. Wieso?**
64 E: Ähm, weil ja der Hunderter da größer ist, obwohl da (*zeigt auf Zehnerstelle von 299*) der Neuner steht. Aber da (*zeigt auf*
65 *305*) ist der Hunderter größer, und, ähm, der Hunderter zählt wieder mehr als der Zehner.
- 66 **I: Mhm, ok, gut. Dann schauen wir uns noch die zwei Zahlen an (*legt Ziffernkärtchen „25“ und „52“ auf den Tisch*).**
67 **Kannst du sie mir bitte vorlesen?**
68 E: 25 und 52.
- 69 **I: Und welche ist da größer?**
70 E: Die 52.
- 71 **I: Und woher weißt du das?**
72 E: Ähm, weil der Fünfer (*zeigt auf die Zehnerstelle von 52*) ist wieder größer als der Zweier (*zeigt auf die Zehnerstelle von 25*).
- 73 **I: Mhm, ok, gut (*räumt Ziffernkärtchen weg*). Dann habe ich jetzt für dich dieses Arbeitsblatt (*legt AB 3 auf den Tisch*).**
74 **Weißt du, was diese Symbole (*zeigt auf die Aufgabe 3H 4Z 5E*) bedeuten? Kannst du mir das sagen?**
75 E: Ja. Das (*zeigt auf 3H*) ist der Dreier und das H heißt 300, der Vierer und das Z heißt 40 und der Fünfer und das E heißt 5
76 Einer. Dreihundert, 4 Zehner und 5 Einer.
- 77 **I: Ok. Jetzt möchte ich bitte, dass du immer – da nimmst du wieder den dicken Stift – die Zahl daneben schreibst, die**
78 **das (*zeigt auf die Angabe*) bedeutet, und mir auch laut vorsagst.**
79 E: 345 (*löst die Aufgabe 3H 4Z 5E = 345; schreibt die Ziffern in der Reihenfolge HZE*).
- 80 **I: Mhm.**
81 E: 327 (*löst die Aufgabe 3Z 2E 7H = 327; schreibt die Hunderter- und die Zehnerstelle auf*).
- 82 **I: Wie bist du darauf gekommen?**
83 E: Ähm, weil man muss einfach nur, so wie es bei den anderen da halt war, schauen: 300 (*zeigt auf 3Z*) und dann der Zweier
84 (*zeigt auf 2E*) und der Siebener (*zeigt auf 7H*) und das ist halt dann 27 (*ergänzt 7 an der Einerstelle*).
- 85 **I: Mhm. Ein anders Kind hat mir da 732 hingeschrieben. Kannst du dir vorstellen, wie das Kind darauf gekommen ist?**
86 E: (*überlegt*) Upsi, das ist falsch, was ich geschrieben hab. Kann ich das (*zeigt auf ihre Lösung*) durchstreichen und neu
87 hinschreiben?
- 88 **I: Ja, kannst du machen.**
89 E: (*streicht 327 durch; schreibt 732 in der Reihenfolge HZE daneben; stockt nach der Hunderterstelle kurz und blickt auf die*
90 *Angabe*)
- 91 **I: Ok. Wie bist du darauf jetzt gekommen?**
92 E: Ähm, weil, da habe ich mich vorher verschaut, und zwar, weil da (*zeigt auf 7H*) der Hunderter ist, da (*zeigt auf 3Z*) der Zehner
93 und da (*zeigt auf 2E*) der Einer.
- 94 **I: Mhm, gut. Die nächste Zahl.**
95 E: Ähm (*überlegt*) 120, nein, 620 (*schreibt zur Aufgabe 6H 2Z = 620; stockt nach der 6 und überlegt; schreibt die 2 bedacht*).
- 96 **I: Und wie bist du darauf gekommen?**
97 E: Weil der (*zeigt auf 6H*), ähm, der Hunderter, also der 600, und da (*zeigt auf 2Z*) hat 2 Zehner, also 20.
- 98 **I: Mhm. Und was bedeutet die Null da (*zeigt auf Einerstelle von 620*)?**
99 E: Für den Zwanziger.
- 100 **I: Für den Zwanziger, ok. Mhm.**
101 E: 503, drei (*nickt; löst die Aufgabe 3E 5H = 503; schreibt die Zahl in der Reihenfolge HZE*).
- 102 **I: Wie bist du darauf gekommen?**
103 E: Weil da (*zeigt auf 5H*) ist der, der Fünfhunderter, und nachdem da kein Zehner ist (*zeigt auf die Angabe*), ist es ein Einer.
104 Und deswegen 3, 503.
- 105 **I: Und was bedeutet die Null da in der Mitte (*zeigt auf Zehnerstelle von 503*)?**
106 E: 103, weil da könnte - sonst würde es heißen, ähm, fünfund, 53.
- 107 **I: Ok.**
108 E: Ähm (*überlegt 9 Sekunden; schaut auf Angabe 4Z 12E*), vier-hun-dert (*überlegt*), hmm (*überlegt 19 Sekunden*), hmm, das ist
109 schwieriger (*überlegt weitere 22 Sekunden; blickt angestrengt auf die Angabe*), ähm.
- 110 **I: Hast du eine Idee dazu?**
111 E: Es könnte da (*zeigt auf 4Z*) vielleicht ein Zehner mehr sein dadurch, dass es 12 Einer sind, aber da bin ich mir nicht ganz
112 sicher.
- 113 **I: Weißt du was, wir können das auch mit Material legen, wenn du dir nicht ganz sicher bist, ja?**
114 E: Yeah (*erfreut*).
- 115 **I: Also wir legen uns 4 Zehner auf (*legt 4 Zehnerscheine in einer Reihe auf den Tisch; bringt den Vorrat an Rechengeld***
116 **in Reichweite für E), und dann legen wir uns noch 12 Einer auf (*legt 12 Einermünzen zu den 4 Zehnerscheinen***
117 **dazu).**
118 E: (*beobachtet I*)
- 119 **I: Wie viel ist das jetzt, was da liegt? Weil das ist genau das, was da (*zeigt auf die Angabe 4Z 12E*) steht.**
120 E: Ähm (*überlegt 27 Sekunden; macht teilweise Zählbewegungen mit dem Kopf dabei; lacht verlegen*).
- 121 **I: Na du kannst es ja einmal zählen. Wie viel ist das, was da liegt?**
122 E: 12 Einer (*zeigt auf die Einermünzen*) und 4 Zehner (*zeigt auf die Zehnerscheine*).
- 123 **I: Ok. Und wie viel ist das zusammen?**
124 E: Ähm (*überlegt 10 Sekunden; lacht verlegen*), könnte man da (*zeigt auf die Zehnerscheine*) auch jetzt die Nuller mal
125 weggeben und dann die Nuller wieder dazurechnen?
- 126 **I: Mach es einmal. Denk laut, dann weiß ich, wie du das meinst.**
127 E: Ähm, dann wäre es aber so, dass man dann 12, 15 Einer hat und dann noch die Nuller dranhängt (*blickt skeptisch und*
128 *fragend*). Nein, das wär dann schon zu viel. Ähm (*überlegt*), hmm.
- 129 **I: Kannst du es zählen? Also angenommen, deine Oma gibt dir so viel Geld (*zeigt auf die Zehnerscheine und***
130 **Einermünzen). Und jetzt willst du wissen, wie viel du bekommen hast von deiner Oma. Kannst du es einfach einmal**
131 **zählen?**

- 132 E: Ähm, 40 (zeigt auf die 4 Zehnerscheine), 50, 60, 70, 80, 90 (schiebt jeweils eine Einermünze zur Seite; stockt bei 90), ähm,
 133 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106 (schiebt jeweils eine Einermünze zur Seite). Dann wären es dann 106 (unsicher), aber, ja
 134 (überlegt; unsicher).
 135 **I: 106.**
 136 E: (blickt fragend und unsicher)
 137 **I: Aber das kommt mir sehr viel vor.**
 138 E: Aber wenn man dann 40 (zeigt auf die Zehnerscheine), 40, einund, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49 (schiebt jeweils eine
 139 Einermünze zur Seite; stockt bei 49), 50, 51, 52.
 140 **I: Mhm.**
 141 E: Also kommt da (zeigt auf die Aufgabe 4Z 12E) dann 52 hin (schreibt 52 in der Reihenfolge ZE auf).
 142 **I: Kannst du mir das jetzt so hinlegen, dass ich auf einen Blick erkennen kann, dass das 52 sind, wenn ich vorbeigehe?**
 143 E: Ähm (legt je eine Einermünze zu einem Zehnerschein; beginnt eine zweite Viererreihe), schauen wir einmal, ob sich das
 144 ausgeht (schiebt die restlichen Einermünzen in die Viererreihen dazu).
 145 **I: Und wie kann ich da jetzt gleich erkennen, dass es 52 sind?**
 146 E: Ähm (überlegt), wenn man, ähm (überlegt), die 40 (zeigt auf die Zehnerscheine), und dann muss man dann nur noch, nur
 147 mehr die (zeigt auf die Einermünzen) dazuzählen.
 148 **I: Ok. Und ein anders Kind, hat mir das einmal so hingelegt (nimmt Rechengeld vom Vorrat; legt 5 Zehnerscheine in**
 149 **einer Reihe auf; legt 2 Einermünzen dazu).**
 150 E: (überlegt)
 151 **I: Kannst du dir vorstellen, wie das Kind darauf gekommen ist?**
 152 E: Hmm, ähm, (überlegt 17 Sekunden; lacht verlegen) nein.
 153 **I: Kannst du dir nicht vorstellen.**
 154 E: Nein, irgendwie nicht.
 155 **I: Nicht, ok (räumt gelegte Mengen zurück zum Vorrat). Wir haben noch die letzte Aufgabe. Schau sie dir einmal an.**
 156 E: Ui-je. Ähm (überlegt; schaut Angabe 2H 13Z 4E an), zweihundert (überlegt 9 Sekunden), kann man dann, können wir das
 157 auch wieder legen? Dann tu ich mir einfacher, mit dem Legen.
 158 **I: Mhm, sicher (legt zwei Hunderterscheine und 13 Zehnerscheine auf).**
 159 E: (zählt Rechengeld mit) Und 4 Einer.
 160 **I: (gibt E 4 Einermünzen)**
 161 E: Also, ähm (überlegt; schaut auf die Aufgabe), 200 (zeigt auf die 2 Hunderterscheine), 110, 120, 130, 140, 150, 160, 170, 180,
 162 190 (zeigt jeweils auf einen der Zehnerscheine; stockt bei 190), 1 000, 100 000 (zeigt jeweils auf einen der Zehnerscheine).
 163 Nein, dann wär ich schon zu hoch, oder? Hmm (blickt fragend zu I; überlegt 27 Sekunden; blickt abwechselnd auf das
 164 Material und die Angabe). Dann wär ich dann schon zu hoch, wenn man bis Tausend rechnet, und über Tausend? Weil
 165 (überlegt 6 Sekunden) man kann eigentlich nur über Tausend rechnen (überlegt). Weil das (zeigt auf die 2
 166 Hunderterscheine) wären 200 (überlegt), 110, 120, 130 (kurze Pause), 140, 150, 160, 170, 180, 190 (kurze Pause), 1000
 167 (gesamter Zählvorgang stockend und langsam; überlegt dabei; zeigt jeweils auf einen Zehnerschein). Dann ist man da
 168 (zeigt auf den nächsten Zehnerschein) bei 10 000 (blickt zur Angabe; überlegt). Und das (zeigt auf Linie zur Notation der
 169 Lösung) ist doch ein längerer Strich wie die weiter oben (überlegt 7 Sekunden). Das kann nur über 1 000 (überlegt 6
 170 Sekunden). Zweihundert (zeigt auf die zwei Hunderterscheine), 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 (flüsternd; zeigt
 171 jeweils auf einen Zehnerschein). Oder? Hmm (überlegt 20 Sekunden; zählt dabei zwischendurch aus der Weite durch
 172 rhythmisches Bewegen des Stiftes in der Luft). Wie nennt man das noch einmal? Tausendvierundvier ...? Nein (seufzt).
 173 **I: Ok. Du hast jetzt schon gezählt. Also wenn du einfach so zählst, ohne dass da etwas liegt, ja?**
 174 E: Mhm.
 175 **I: Von 150 in Zehnerschritten nach oben. Wie zählst du da? Also 150, 160.**
 176 E: Ähm, 170, 180, 190, und dann 1000?
 177 **I: Nach 190 kommt 1000?**
 178 E: (überlegt 7 Sekunden) Ah, das war das, was ich dauernd falsch gemacht hab. Dann kommt 300.
 179 **I: Mhm.**
 180 E: Ah, das hab ich falsch gemacht. 200 (zeigt auf 2 Zehnerscheine), 210, 220, 230, 240 (stockt), 250, 260, 270, 280, 290 (stockt
 181 kurz), 300, 310, 320 (stockt) 330 (zeigt während des gesamten Zählvorgangs auf je einen Zehnerschein), 334.
 182 **I: Mhm.**
 183 E: (löst die Aufgabe 2H 13Z 4E = 334; stockt beim Aufschreiben kurz nach der Hundertestelle)
 184 **I: Ok (schiebt das gesamte Rechengeld zurück in den Vorrat). Kannst du mir einmal 334 (zeigt auf die notierte Lösung)**
 185 **legen mit dem Material?**
 186 E: Ach (greift zu den Hunderterscheinen), 334?
 187 **I: Mhm.**
 188 E: (nimmt 3 Hunderterscheine und ordnet diese sehr sorgfältig an; überlegt und blickt auf die notierte Lösung; nimmt 3
 189 Zehnerscheine und legt diese neben die Hunderterscheine; nimmt 4 Einermünzen und legt sie dazu)
 190 **I: Ok. Und es ist ja zuerst auch 334 gelegen, oder?**
 191 E: Ja, aber halt auf eine andere Weise.
 192 **I: Auf eine andere Weise. Und kannst du dir vorstellen, was jetzt das (zeigt auf das gelegte Rechengeld) mit dem hier**
 193 **(zeigt auf die Angabe 2H 13Z 4E) zu tun hat?**
 194 E: Weil das hier (zeigt auf das Rechengeld) ist das Ergebnis, was von da (zeigt auf die Angabe) ist. Und vorher ist eben 2
 195 Hunderter gelegen (zeigt auf 2H), 13 Zehner (zeigt auf 13Z) und 4 Einer (zeigt auf 4E), und das ergibt dasselbe.
 196 **I: Ok. Und wie kann das dasselbe ergeben, weil jetzt sind nur mehr 3 Zehner (zeigt auf die Zehnerscheine) da und nicht**
 197 **13? Wo sind die anderen Zehner?**
 198 E: Das, also das, was man hier (zeigt auf die Angabe 2H 13Z 4E) gerechnet hat, ist das (zeigt auf das gelegte Rechengeld) das
 199 Ergebnis.
 200 **I: Ok, gut. Dann machen wir jetzt etwas anderes. Ich habe hier Steine mitgebracht (leert Steine auf den Tisch), und**
 201 **dann habe ich hier Gläser (stellt 8 Gläser auf den Tisch). Und ich möchte jetzt, dass wir in jedes Glas bitte 10 Steine**
 202 **einfüllen, ok?**
 203 E: Mhm.
 204 **I: Und ich helfe dir dabei und wir füllen in jedes Glas 10 Steine. Und wo schon 10 Steine drin sind, die stellen wir da auf**
 205 **die Seite.**

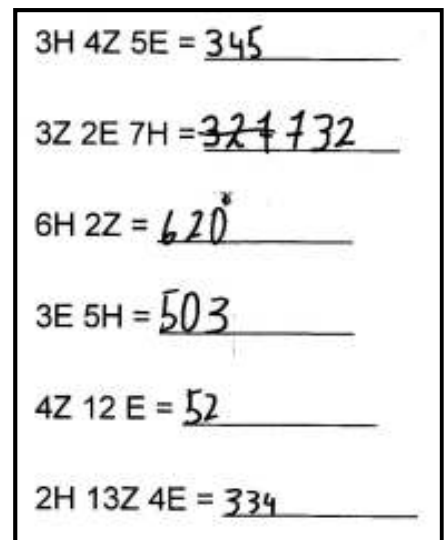
- 206 E: (zählt 10 Steine einzeln mit einer Hand in die andere und füllt sie anschließend in ein Glas; zögert) Ich zähle sie noch einmal
 207 nach (leert Steine aus und zählt sie einzeln in das Glas hinein; zählt für die nächste 2 Gläser jeweils 10 Steine einzeln mit
 208 einer Hand in die andere und füllt sie anschließend in das Glas).
- 209 **I: Gut (rückt Gläser in die Mitte). Kannst du mir sagen, wie viele Steine das (zeigt auf die Gläser) sind?**
 210 E: (zählt zunächst ohne Handbewegung; Lippenbewegung erkennbar; zählt dann doch in Einerschritten durch Zeigen auf jedes
 211 Glas; flüstert dabei) 80.
- 212 **I: Kannst du es noch einmal laut zählen, sodass ich es auch hören kann?**
 213 E: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 (zeigt dabei jeweils auf ein Glas).
- 214 **I: Ok, gut. Jetzt möchte ich bitte – ich schiebe einmal alles zu dir, die Gläser und die Steine (schiebt Gläser und Vorrat
 215 an Steinen zu E). Jetzt möchte ich, dass du mir bitte 25 Steine gibst.**
 216 E: (zählt Steine einzeln durch Verschieben vom Vorrat weg; flüstert dabei; stockt bei 10 Steinen, da zu wenig Distanz zum
 217 Vorrat ist; schiebt die gezählten Steine wieder zum Vorrat und beginnt von Neuem; schiebt die Steine einzeln weiter vom
 218 Vorrat weg; flüstert dabei) 25, so.
- 219 **I: Kannst du sie mir auch so hinlegen, dass ich gleich sehe, wie viele das sind?**
 220 E: Mhm (bildet durch Verschieben – begleitet durch lautes Zählen in Einerschritten – fünf untereinander angeordnete
 221 Fünferreihen; endet bei 25 Steinen in 5 Spalten zu je 5 Reihen).
- 222 **I: Ok. Und ein anderes Kind hat mir das einmal so hingelegt (schiebt 2 Gläser und 5 Steine zur Seite), 25 Steine. Kannst
 223 du dir vorstellen, wie es darauf gekommen ist?**
 224 E: Naja, weil da schon, ähm, da (zeigt auf die 2 Gläser) sind 20 und dann muss man dann eigentlich nur mehr die 5 dazulegen.
 225 Also man kann es auf verschiedene Varianten so machen.
- 226 **I: Ok, mhm, gut (schiebt Gläser und Steine zurück zum Vorrat). Dann lege ich dir jetzt etwas her (schiebt 5 Gläser und 3
 227 Steine zur Seite). Kannst du mir sagen, wie viele das sind?**
 228 E: Ähm, zwei, vier (überlegt 11 Sekunden; blickt dabei auf die Menge) 53.
- 229 **I: Mhm. Kannst du es noch einmal laut zählen, bitte?**
 230 E: 10, 20, 30, 40, 50 (zeigt dabei auf je ein Glas), und dann sind da (zeigt auf die 3 einzelnen Steine) noch die 3 und das ist 53.
- 231 **I: Ok. Das lassen wir da (schiebt die Menge 53 etwas zur Seite). Kannst du mir bitte da daneben 35 legen?**
 232 E: Mit denen (zeigt und greift zum Vorrat einzelner Steine).
- 233 **I: Du kannst verwenden, was du möchtest.**
 234 E: (hält inne; blickt auf die Gläser; überlegt 6 Sekunden; nimmt 2 Gläser und stellt sie zur Seite; schiebt einzeln Steine vom
 235 Vorrat zu den beiden Gläsern und ordnet diese in Dreierreihen untereinander an - zählende Lippenbewegungen erkennbar;
 236 hält bei 9 Steinen kurz inne; endet bei 15 Steinen in 3 Spalten zu je 5 Reihen)
- 237 **I: Ok, gut. Kannst du zu diesen Mengen die zwei Kärtchen (legt Ziffernkärtchen „35“ und „53“ auf den Tisch) zuordnen
 238 – welches zu welcher passt?**
 239 E: (ordnet die Ziffernkärtchen richtig zu)
- 240 **I: Ok. Wo siehst du – was hat die 3 (zeigt auf die Einerstelle von 53) mit dieser Menge hier (zeigt auf die Menge aus 5
 241 Gläsern und 3 Steinen) zu tun?**
 242 E: Die 3, das sind da (greift zu den 3 einzelnen Steinen), diese 3 Steine. Und die 50 (zeigt auf die Zehnerstelle von 53), das
 243 sind die hier (zeigt auf die Gläser), weil in jedem 10 sind und das sind 5 Gläser.
- 244 **I: Ok, gut. Und wo siehst du die 3 (zeigt auf die Zehnerstelle von 35) – was hat die mit deiner, mit dieser Menge hier
 245 (zeigt auf die vom Kind gelegte Menge aus 2 Gläsern und 15 Steinen) zu tun?**
 246 E: Hey, das hätte ich teilen sollen. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 (zeigt dabei auf jeweils einen Stein). Und die (schiebt die übrigen 5
 247 Steine etwas weiter nach unten) schieb ich dann halt etwas weiter von – (schiebt die 10 abgezählten Steine näher
 248 zusammen) also das (zeigt auf die 10 Steine) sind die 10, und das (schiebt die 5 Steine neben das andere Glas) sind die 5.
- 249 **I: Ok, gut. Dann räumen wir die Steine wieder weg.**
 250 E: (hilft I beim Wegräumen der Steine und Gläser)
- 251 **I: Danke schön. Jetzt eine andere Frage (legt Zehnerkarton für Eier auf den Tisch): Man kann Eier in Zehnerkartons
 252 kaufen.**
 253 E: Mhm, oder in Zwölfer (lacht).
- 254 **I: Oder in Zwölfer, aber ich habe einen Zehnerkarton. Da sind immer 10 Einer drin. Und jetzt hat ein Bauer 43 Eier (legt
 255 Ziffernkärtchen „43“ auf den Tisch) in seinem Hühnerstall gefunden.**
 256 E: Mhm.
- 257 **I: Wie viele Kartons kann er jetzt vollfüllen?**
 258 E: Gibt's Dreierkartons?
- 259 **I: Na wie viele Zehnerkartons (zeigt auf Zehnerkarton) kann er vollfüllen?**
 260 E: 4 Zehnerkartons und dann gibt's, glaub ich, noch diese kleinen, und da passen 3 rein.
- 261 **I: Mhm. Und wie hast du das jetzt herausgefunden?**
 262 E: Weil, das (nimmt den Karton in die Hand) ist halt ein Zehner, und, ähm, 4 Zehner sind 40. Und dadurch – diese kleinen
 263 (deutet kleinen Karton mit den Fingern an) – dann bleiben aber noch 3 übrig, und dann hat man diese kleinen Eierkartons,
 264 wo 3 reinpassen. Und da gibt man dann noch die 3 rein.
- 265 **I: Gut (räumt Ziffernkärtchen weg). Und in einem riesengroßen Hühnerstall hat der Bauer (legt Ziffernkärtchen „123“
 266 auf den Tisch) 123 gefunden.**
 267 E: Wow.
- 268 **I: Wie viele Kartons kann der vollmachen?**
 269 E: (überlegt) Von den Zehner?
- 270 **I: Mhm. Wie viel Zehnerkartons (zeigt auf den Karton), genau, ja.**
 271 E: 10 (überlegt) Zehnerkartons (überlegt), und, naja, nein, 12 Zehnerkartons (überlegt), oder? (überlegt) Auf jeden Fall hat er
 272 einmal 12 (zeigt auf das Ziffernkärtchen), ähm, 10 Zehnerkartons und (überlegt) – waren es vielleicht doch 12? Hmm
 273 (überlegt 12 Sekunden). Aber wenn man 12 (zeigt auf das Ziffernkärtchen), dann hätte man, ähm, 120. Ja, also 12
 274 Zehnerkartons und einen Dreier.
- 275 **I: Mhm, ok. Und du hast jetzt gerechnet: 12 mal 10 sind ...**
 276 E: Ja (nickt).
- 277 **I: Das hast du eh schon gesagt. Brauch ich dich nicht mehr fragen (räumt Zehnerkarton und Ziffernkärtchen weg). Gut,
 278 andere Frage: Der Hans hat schon 47 Euro (legt Ziffernkärtchen „47“ auf den Tisch) gespart. Und er möchte sich**

- 279 **(legt Ziffernkärtchen „87“ auf den Tisch) einen Elektrobaukasten kaufen. Der kostet 87 Euro (zeigt auf das**
 280 **Ziffernkärtchen „87“). Wie viel Geld braucht er noch?**
 281 E: Ähm, ähm, vier-und, nein, ähm, ja, 40 Euro.
 282 **I: Mhm. Wie hast du das gerechnet?**
 283 E: Ähm, die Einerstelle, die bleibt gleich, aber die Zehner, die ist unterschiedlich. Und dann muss man nur rechnen: 4 und wie
 284 viel ist 8. Und das ist dann halt 4.
 285 **I: Ok. Und woher weißt du dann, dass es 40 ist?**
 286 E: Weil das, weil das waren jetzt nur die Einer, die ich gerechnet habe. Und dann muss – da fehlt dann noch der Nuller, weil der
 287 bleibt übrig, den hab ich weggezählt, und dann gibt man dann noch einen Nuller dazu und dann ist es 40.
 288 **I: Mhm, ok (räumt Ziffernkärtchen weg). Und der Herr Lehrer, der möchte sich ein I-Pad kaufen.**
 289 E: (lacht)
 290 **I: Und er hat schon 279 Euro (legt Ziffernkärtchen „279“ auf den Tisch) gespart, und es kostet aber 579 Euro (legt**
 291 **Ziffernkärtchen „579“ daneben). Wie viel Euro braucht er jetzt noch?**
 292 E: (überlegt kurz) Drei, dreihundert Euro.
 293 **I: Wie bist du da so schnell draufgekommen?**
 294 E: Weil: 2 (zeigt auf die Hunderterstelle von 279) und wie viel ist 5 (zeigt auf die Hunderterstelle von 579)? Ist 3. Aber dann
 295 fehlen noch die 3 Nuller (zögert), 2 Nuller. Und, ähm, die muss man dann noch dazurechnen.
 296 **I: Mhm. Und woher kommen die, weil ich sehr da (zeigt auf die Ziffernkärtchen) gar keine Nuller?**
 297 E: Weil die Stelle (zeigt auf die Hunderterstellen beider Ziffernkärtchen) ist die Hunderterstelle, das (zeigt auf die Zehnerstelle
 298 von 279) ist die Zehner und das (zeigt auf die Einerstelle von 279) ist die Einer.
 299 **I: Gut erklärt (räumt Ziffernkärtchen weg). Dann habe ich noch eine andere Frage, und zwar: Kannst du bitte von 350**
 300 **rückwärtszählen in Zehnerschritten?**
 301 E: 350.
 302 **I: Mhm, rückwärts, in Zehnerschritten.**
 303 E: Ähm, (überlegt) muss ich jetzt (...), 340, nein (...; lacht), ähm (überlegt 11 Sekunden). Dreihundert (...)
 304 **I: (...) Fünfzig.**
 305 E: (...) Fünfzig, 350. Ähm, dreihundertvier (...), bis wie viel?
 306 **I: Bis wie viel? Fang einmal an, ich sage dann schon stopp.**
 307 E: Ähm, 340, dreihundert, äh, dreißig, 320, 310, zweihun, äh, 290, 280, 270, 260, 250.
 308 **I: Mhm, danke. Und kannst du das auch von 347 rückwärts?**
 309 E: Dreihundert (...) siebenunddreißig, dreihundert-siebenund, zweihundert, dreihundertsiebenundzwanzig, 317, ähm,
 310 zweihundertneunund, siebenundneunzig, zweihundert, ähm, siebenundachtzig.
 311 **I: Ok. Kannst du mir das auch einmal aufschreiben bitte (legt AB Zahlenstrahl auf den Tisch)?**
 312 E: (lacht)
 313 **I: Ich habe es da (zeigt auf die vornotierte Zahl) aufgeschrieben: von 357 rückwärts in Zehnerschritten, ja?**
 314 E: Mhm. Mit dem Stift?
 315 **I: Ja, mit dem kannst du ruhig schreiben.**
 316 E: 357, dreihundert-siebenundvierzig (schreibt 347 in der Reihenfolge HZE; zögert nach der Hunderterstelle kurz), dreihundert
 317 (schreibt 3), dreihundertsiebenund-dreißig (ergänzt 37 in der Reihenfolge ZE), dreihundert-siebenundzwanzig (schreibt 327
 318 stockend in der Reihenfolge HZE), dreihundert-siebzehn (schreibt 317 in der Reihenfolge HZE), zweihundert (schreibt 2),
 319 ups (schreibt 3 darüber), dreihundert-sieben (schreibt 307 stockend in der Reihenfolge HZE; überlegt), zweihundert-
 320 siebenundneunzig (schreibt 297 stockend in der Reihenfolge HZE), 287 (schreibt 287 in der Reihenfolge HZE).
 321 **I: Ok, passt. Danke schön (räumt Zahlenstrahl weg). Jetzt habe ich eine ganz andere Frage: Die Oma Herta hat 2**
 322 **Enkelkinder und sie möchte zu Weihnachten jedem gleich viel Geld schenken.**
 323 E: Ok.
 324 **I: Und sie hat nur einen Hunderteuroschein und 4 Zehneuroscheine.**
 325 E: Ok.
 326 **I: Was kann sie machen.**
 327 E: 4 Kinder.
 328 **I: 2 Kinder.**
 329 E: 2 Kinder, und wie viel Geld war das?
 330 **I: Ein Hunderteuroschein und 4 Zehneuroscheine.**
 331 E: Sie kann die 4 Eurozeheuscheine, also die 4 Zehneuroscheine weglassen, und sie könnte zur Bank gehen und könnte sich
 332 die, den Hunderter auf zwei Fünfiger wechseln lassen. Und dann kann sie jedem Kind zu Weihnachten 50 Euro schenken.
 333 **I: Und was ist mit den 4 Zehneuroscheinen? Die behält sie sich?**
 334 E: Äh, oder sie schenkt ihnen dann noch jeder 70 Euro.
 335 **I: Ok. Und nun schon die letzten Fragen – also „schon“.**
 336 E: Was (traurig)?
 337 **I: Wolltest du noch länger weitermachen?**
 338 E: (nickt)
 339 **I: Ok. Was ist die Hälfte von 4?**
 340 E: (prompt) 2.
 341 **I: Und die Hälfte von 40?**
 342 E: (prompt) 20.
 343 **I: Und woher weißt du das?**
 344 E: Weil, es ist dasselbe, nur ist da halt eine Null hinten dran. Und da muss man dann nur die Null überall dranhängen, und dann
 345 ist, kommt das quasi dasselbe raus.
 346 **I: Mhm. Und was ist die Hälfte von 90?**
 347 E: (überlegt; lacht) Das ist keine gerade Zahl.
 348 **I: Mhm. 9 ist keine gerade Zahl. Aber was ist die Hälfte von 90?**
 349 E: Ähm (überlegt). Die Hälfte von 90 ist (fragend; überlegt 11 Sekunden), ähm, da steh ich auf der Leitung.
 350 **I: Dann machen wir das so (legt 9 Zehnerscheine des Rechengeldes auf den Tisch). Wir nehmen uns 90, und jetzt**
 351 **versuchen wir, das auf zwei aufzuteilen,**

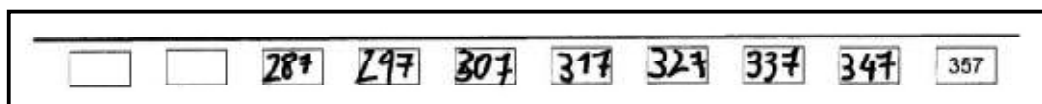
- 352 E: (schiebt immer zwei Zehnerscheine gleichzeitig zur Seite; ordnet diese in zwei Reihen zu je 4 Scheinen an; schiebt den
 353 neunten Schein in einer Reihe dazu; überlegt) Das geht nicht.
 354 **I: Was könnte man da machen?**
 355 E: Man könnte den (nimmt den neunten Zehnerschein in die Hand) aufteilen auf zwei Fünfer. Dann würde es sich ausgehen.
 356 Oder auf jeweils fünf Einer.
 357 **I: Mhm, super. Und was ist dann die Hälfte von 90?**
 358 E: (überlegt) 5, oder (blickt skeptisch)?
 359 **I: Na machen wir das einmal. Du hast ja gesagt, du hast hier (zeigt auf die beiden Gruppen aus 4 Zehnerscheinen)**
 360 **schon jeweils 4, und dann hast du ja gesagt, den (zeigt auf den übrigen Zehnerschein) könnten wir aufteilen auf**
 361 **zwei Fünfer.**
 362 E: Ähm.
 363 **I: Du kannst es auch machen (schiebt Einermünzen näher in das Blickfeld).**
 364 E: 25.
 365 **I: Du kannst es auch machen, wenn du möchtest.**
 366 E: Ja (schiebt jeweils 5 Einer Münzen zu den 2 Vierergruppen; schiebt den gewechselten Zehnerschein zurück in den Vorrat).
 367 Das wären dann 10, 20, 30, 40 (verschiebt jeweils einen Zehnerschein ein Stückchen; nimmt die erste Einermünze in die
 368 Hand; stockt und überlegt 7 Sekunden), 40, ähm, 40, 41, 42, 43, 44, 45 (schiebt jeweils eine Einermünze zur Seite; blickt
 369 fragend zu I).
 370 **I: Mhm.**
 371 E: Das wären dann 45.
 372 **I: Ist die Hälfte von (...)**
 373 E: 90.
 374 **I: Ok, gut. Und was ist die Hälfte von 200?**
 375 E: Die Hälfte von 200 ist (überlegt), die Hälfte von 200 ist 100, weil, wenn man, ähm, einen Zweihunderschein hat, und den
 376 teilt auf zwei Hunderter, zwei, also zwei Hunderscheine.
 377 **I: Mhm. Was ist die Hälfte von 600?**
 378 E: (prompt) 300.
 379 **I: Ok. Wieso hast du das so schnell gewusst?**
 380 E: Weil, ähm, äh, 2 mal 3 6 ist. Und dann muss man nur die zwei Nuller noch einmal dranhängen, dann ist es 600.
 381 **I: Ok. Und die letzte Frage: Die Hälfte von 500?**
 382 E: Ähm, die Hälfte von 500 ist (stockend; überlegt), ähm, die Hälfte von 500 (überlegt), ist (überlegt), ähm. Ja, da übt man dann
 383 wieder, ähm, teilen, und zwar 50 quasi, weil, ähm, weil man die, also, wenn man es jetzt, auf zwei (...) also, nein, das geht
 384 wieder nicht. Teilen (überlegt). Wenn man 5 Hunderscheine hat, ähm, ich weiß nicht.
 385 **I: Na wenn man 5 Hunderscheine hat, mhm. Dann kann man die aufteilen, hast du gesagt.**
 386 E: Darf ich es mit dem (zeigt auf das Rechengeld) machen?
 387 **I: Ja (schiebt 5 Hunderscheine zu E). Jetzt haben wir da 5 Hunderscheine. Jetzt wollen wir die auf 2 aufteilen.**
 388 E: (ordnet die Hunderscheine in zwei Gruppen zu je zwei Scheinen) Das geht nicht. Da müsste man jetzt dann wechseln,
 389 wechseln auf zwei Fünziger.
 390 **I: Ok. Und was ist dann die Hälfte von 500?**
 391 E: Ähm (überlegt 7 Sekunden), 250.
 392 **I: Ok, gut, das war es schon.**
 393 E: Kann ich noch etwas machen?
 394 **I: Na wir haben jetzt schon ganz schön lange gearbeitet. Danke vielmals.**



Kind E – geschriebene Zahlen



Kind E – AB 3



Kind E – AB Zahlenstrahl

8.7 Interview mit Kind F

Interview Nr. 6
Kind F
Datum: 27.09.2012
Beginn: 09:25:56
Ende: 10:04:12
Dauer: 00:38:16

- 1 I: Das Wichtigste heute ist: Immer wenn ich dir eine Frage stelle, werde ich dir dann nicht sagen, ob das jetzt richtig
2 oder falsch ist. Das interessiert mit heute nicht so, sondern mich interessiert, wie du das gemacht hast, oder wie
3 du das gerechnet hast. Gut?
- 4 F: Aha.
- 5 I: Also ich werde dich immer fragen: Wie hast du das jetzt gemacht? Oder wie hast du das jetzt herausgefunden? Und
6 das interessiert mich heute besonders, ok?
- 7 F: (lacht) Das kann ich gut, erklären. Der Herr Lehrer fragt mich das auch die ganze Zeit.
- 8 I: Na super. Dann bist du schon vorbereitet. Gut. Die erste Aufgabe: Da nimmst du bitte den dicken Stift, damit ich es
9 gut lesen kann, und ich sage dir drei Zahlen und du schreibst sie dann einfach untereinander auf. Und du kannst
10 ruhig groß schreiben, damit ich es gut lesen kann. Ok?
- 11 F: Ja.
- 12 I: Gut. 59.
- 13 F: (schreibt 59 in der Reihenfolge EZ)
- 14 I: Mhm. 362.
- 15 F: (schreibt 362 in der Reihenfolge HEZ; zögert nach der Hunderterstelle)
- 16 I: Und 704.
- 17 F: (schreibt 704 in der Reihenfolge HEZ; zögert nach der Hunderterstelle) Hm, ja, richtig doch.
- 18 I: Ok, gut. Dann die nächste Frage - den Stift kannst du einstweilen auf die Seite legen, den brauchen wir erst später
19 wieder.
- 20 F: (legt Stift beiseite)
- 21 I: (legt Ziffernkärtchen „246“ auf den Tisch) Kannst du mir die Zahl bitte vorlesen?
- 22 F: (prompt) 246.
- 23 I: Ok. Und kannst du mir sagen, was der (zeigt auf die Zehnerstelle von 246), was die Vier da in der Mitte bedeutet?
- 24 F: Ähm, das (zeigt auf die Zehnerstelle von 246) ist halt die Vierzig. Also (zeigt auf die Hunderterstelle von 246) Zweihundert,
25 das ist halt Zweihundert plus Vierzig (zeigt auf die Zehnerstelle von 246) plus 6 ist das.
- 26 I: Ok.
- 27 F: Naja, die Zahl, sozusagen.
- 28 I: Ok, gut, das bedeutet es. Sehr gut. Dann meine nächste Frage: (legt Preisliste von Fahrrädern auf den Tisch) Ich
29 habe hier eine Preisliste von Fahrrädern, ja?
- 30 F: Ok.
- 31 I: Kannst du mir jetzt sagen, oder darauf zeigen, welches das teuerste Fahrrad ist?
- 32 F: (zeigt prompt auf 653 – das teuerste Fahrrad) Das.
- 33 I: Und wieso hast du das so schnell gewusst?
- 34 F: Weil ich, weil ich, als erstes hab ich, muss ich eigentlich, hab ich als erstes eigentlich bei den Hundertern nachgeschaut (fährt
35 mit dem Zeigefinger die Spalte der Hunderterstellen von oben nach unten ab).
- 36 I: Mhm.
- 37 F: Ich habe gesehen, dass das Höchste 6 war (zeigt auf die Hunderterstelle der ersten Zahl von oben mit 6 Hundertern). Als der
38 da war (zeigt auf die zweite Zahl mit 6 Hundertern), hab ich halt zwei gesehen (zeigt auf die zwei Zahlen mit der Ziffer 6 an
39 der Hunderterstelle). Dann hab ich, hab ich auf die, dann hab ich auf die, also auf die Zehner geschaut (zeigt nacheinander
40 auf die Zehnerstellen der beiden Zahlen mit 6 Hundertern), dann hab ich halt gesehen, dass das (zeigt auf die höchste
41 Zahl), das höher ist.
- 42 I: Mhm, und ...
- 43 F: Wenn das, wenn das jetzt gleich wäre (zeigt auf die beiden Zehnerstellen der Zahlen mit 6 Hundertern), ...
- 44 I: Mhm.
- 45 F: Wenn das jetzt gleich wäre, dann würde, dann würde, dann würde ich bei den Einern nachschauen (fährt mit dem Zeigefinger
46 die Spalte der Einerstellen von oben nach unten ab). Dann hätte, dann wäre das (zeigt auf die Zahl 635) das Höchste.
- 47 I: Mhm.
- 48 F: Aber das ist ja nicht gleich (zeigt auf die Zehnerstellen), deswegen ist das (zeigt auf 653) das Höchste.
- 49 I: Ok. Ganz toll erklärt, super. Dann meine nächste Frage (legt Ziffernkärtchen „305“ und „299“ auf den Tisch): Kannst
50 du mir bitte die zwei Zahlen vorlesen?
- 51 F: 305 und 299.
- 52 I: Und welche ist da jetzt am größten? Oder welche ist mehr wert?
- 53 F: (zeigt auf 305) Die.
- 54 I: Und woher hast du das so schnell gewusst?
- 55 F: Ähm, weil ich, wie vorher mit den Fahrrädern, auf die (zeigt abwechselnd auf die Hunderterstelle von 305 und auf die
56 Hunderterstelle von 299) auf die vordere Zahl geschaut hab und vorher auch gelesen hab. Und ja, das hab ich schnell
57 herausgefunden.

- 58 **I: Und das, obwohl da (zeigt auf die Zehnerstelle von 299) eine Neun steht und da (zeigt auf die Zehnerstelle von 305)**
 59 **eine Null steht?**
 60 F: Das (zeigt abwechselnd auf die Hunderterstellen) ist mehr (sehr bestimmt). Als erstes muss ich immer die Hunderter, und
 61 wenn die gleich sind, dann schau ich auf den Nuller (zeigt auf die Zehnerstelle von 305). Wenn das gleich wäre, dann würde
 62 dann das (zeigt auf die Zehnerstelle von 299) das Höhere sein. Aber das ist es halt nicht.
 63 **I: Ok. Toll erklärt. Dann habe ich noch (legt Ziffernkärtchen 25 und 52 auf den Tisch) - kannst du mir die zwei Zahlen**
 64 **bitte vorlesen?**
 65 F: 25 und 52.
 66 **I: Und welche ist da mehr wert?**
 67 F: Die (zeigt auf 52).
 68 **I: Ok, gut. Auch wieso?**
 69 F: Wie vorher (betont, lacht).
 70 **I: Naja, blöde Frage, oder (räumt Ziffernkärtchen weg)?**
 71 F: (lacht) Ja.
 72 **I: Gut. Dann hab ich schon meine nächste Frage, und zwar (legt AB 3 auf den Tisch): Weißt du, was diese Buchstaben**
 73 **hier bedeuten (zeigt auf die Aufgabe 3H 4Z 5E)?**
 74 F: 3 Hunderter, 4 Zehner und 5 Einer.
 75 **I: Ok. Jetzt möchte ich bitte, dass du wieder den dicken Stift nimmst und immer die Zahl, die das (zeigt auf die Aufgabe**
 76 **3H 4Z 5E) bedeutet, daneben schreibst ...**
 77 F: Einfach.
 78 **I: ... und mir auch laut vorliest. Gut.**
 79 F: Soll ich es jetzt zuerst hinschreiben und dann das laut vorlesen?
 80 **I: Ja, mach das so. Schreib es zuerst hin und dann lies es mir vor.**
 81 F: (löst die Aufgabe 3H 4Z 5E = 345) Dreihunderzweiundvier, fünfundvierzig.
 82 **I: Mhm.**
 83 F: (löst die Aufgabe 3Z 2E 7H = 372) 372.
 84 **I: Mhm. Wie bist du darauf gekommen?**
 85 F: Weil, weil da (zeigt auf 7H) das H steht für – oh, Mist. Das ist falsch. Da gehört sieben, 732 hin.
 86 **I: Mhm. Du darfst es durchstreichen und daneben richtig hinschreiben, wenn du möchtest.**
 87 F: (streicht die falsche Antwort durch; schreibt 7; zögert und schaut auf die Angabe; ergänzt 2 und 3 invers der Reihenfolge EZ;
 88 blickt auf die nächste Aufgabe)
 89 **I: Liest du mir die Zahl auch noch einmal vor, bitte?**
 90 F: 732 (löst die Aufgabe 6H 2Z = 6; zögert und blickt auf die Angabe; ergänzt 20 in der Reihenfolge ZE).
 91 **I: Wie bist du darauf jetzt gekommen?**
 92 F: Weil, weil da keine Zahl steht (zeigt auf die Angabe), also für Einer ist da keine Zahl, also kann es (zeigt auf die Einerstelle
 93 von 620) nur 0 sein. Und, und ich bin dann auch draufgekommen, dass da sechshundert ist, weil ein H steht (zeigt auf 6H).
 94 **I: Ok. Und könnt ich die Null (zeigt auf die Einerstelle von 620) nicht einfach weglassen?**
 95 F: Nein, dann wär es falsch.
 96 **I: Mhm.**
 97 F: Weil dann müsste da (zeigt auf 6H) Zehner stehen und da (zeigt auf 2Z) Einer.
 98 **I: Mhm.**
 99 F: (löst die Aufgabe 3E 5H = 503; zögert nach der 5 kurz und blickt auf die Angabe; schreibt die Zahl in der Reihenfolge HZE)
 100 **I: Ok. Und wie bist du darauf jetzt gekommen?**
 101 F: Das ist genauso wie das mit dem (zeigt auf die vorige Aufgabe). Weil das Hundert ist (zeigt auf 5H) und das Einer (zeigt auf
 102 3E), also. Und das kann ja nicht sein, dass, dass das, dass da (zeigt auf die Zehnerstelle in 503) jetzt keine Zahl
 103 dazwischen ist. Kann ja nicht 53 sein. Es muss ja 500 sein (zeigt auf die Hunderterstelle von 503).
 104 **I: Ok, gut. Ich stelle blöde Fragen heute, gell?**
 105 F: Ja (lacht; löst die Aufgabe 4Z 12E = 412; zögert nach 4).
 106 **I: Ok. Und wie bist du darauf jetzt gekommen?**
 107 F: Weil – hab ich mich auch jetzt gewundert, warum das jetzt so ist – weil das (zeigt auf 4Z), das Zehner ist, und wenn da jetzt
 108 noch 12 Einer sind (zeigt auf 12E), dann kann es eigentlich nur 412 sein, aber ich, ich versteh es jetzt auch irgendwie gar
 109 nicht, wie das jetzt sein soll, weil das, das weiß ich eigentlich nicht wirklich jetzt. Das ist jetzt, mir jetzt neu. Das hab ich ja
 110 noch nicht gelernt (lacht). Das ist mir jetzt neu.
 111 **I: Ok. Dann würde ich vorschlagen, wir schauen uns das jetzt einmal mit Material an, ja? Ich habe hier so Spielgeld, das**
 112 **habe ich gemacht. Und dann können wir uns einmal mit Material anschauen, wie diese Aufgabe aussieht, ok?**
 113 F: Ja.
 114 **I: Legst du dir einmal die (zeigt auf die Angabe) 4 Zehner und 12 Einer. Ich ordne es nur so, dass du es siehst (ordnet**
 115 **Material nach Stellenwerten am Tisch). Nimm dir einmal 4 Zehner und 12 Einer.**
 116 F: (sieht I beim Ordnen zu; denkt nach) Warte! (schaut auf die Angabe) Warte! (überlegt; rechnet im Kopf; überlegt; lacht) Ah,
 117 ok. Das ist, das ist falsch. Das (zeigt auf die Lösung 412) ist falsch, oder? Falsch (streicht 412 durch).
 118 **I: Ich habe ja gesagt, ich sag nicht, ob es falsch oder richtig ist. Aber wenn du etwas Neues hinschreibst, werde ich**
 119 **dich fragen, wie du darauf jetzt gekommen bist.**
 120 F: (löst die Aufgabe 4Z 12E = 53; überlegt nach 5 und rechnet im Kopf (zählend?)) So.
 121 **I: Mhm. Wie bist du darauf jetzt gekommen?**
 122 F: Weil, weil die Zehner (zeigt auf 4Z) hab ich jetzt – da waren jetzt 4 Zehner plus 12 Einer (zeigt auf 12E). Und, das sind (zeigt
 123 auf 53), das sind jetzt dann, sind jetzt dann, sollten, sollten dann (schaut dabei auf seine Lösung) – 40 plus, das ist wie 40
 124 plus 12 (überlegt).
 125 **I: Mhm.**
 126 F: Warte mal (lacht; streicht 3 durch und schreibt 2 darüber). So, jetzt (lacht).
 127 **I: Mhm.**
 128 F: Das ist wie 40 plus 12. Das, das jetzt die Zehner (zeigt auf die Angabe), das ist ja jetzt, das ist jetzt, die, das ist jetzt ein mal
 129 zehn, ist jetzt dann da, das ist jetzt dann noch einmal 50.
 130 **I: Mhm.**
 131 F: Und dann noch die 2 dazu, also 52.

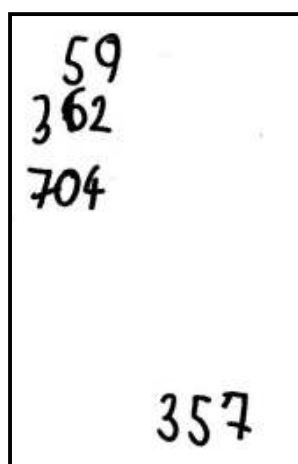
- 132 **I: Ok. Das heißt, was ist mit diesem Einser da (zeigt auf die Ziffer 1 in der Angabe 12E) passiert?**
 133 F: Der Einser, der ist, das ist zehn (zeigt auf 12E). Das ist halt zehn und das ist halt sozusagen noch ein Zehner, noch ein, noch
 134 ein ...
 135 **I: Mhm, ja. Hast du mir super erklärt. Versteh ich gut so. Mhm. Dann schauen wir uns gleich die nächste Aufgabe noch**
 136 **an.**
 137 F: (überlegt; löst die Aufgabe 2H 13Z 4E = 334; zögert nach der Hunderterstelle)
 138 **I: Mhm. Wie bist du darauf jetzt gekommen?**
 139 F: Weil das genauso war wie da (zeigt auf die vorige Aufgabe), aber das es halt jetzt (zeigt auf 13Z), das ist jetzt noch ein (zeigt
 140 erneut auf 13Z), das ist jetzt halt noch ein Hunderter, das da (zeigt auf 13Z), das (zeigt auf die Ziffer 1 von 13Z). Das ist halt
 141 noch ein Hunderter. Das ist Hunderter (zeigt auf die Ziffer 1 von 13Z) plus 3 (zeigt auf 3Z), also 300 (zeigt auf die
 142 Hunderterstelle von 334), und noch ein, ein, ein, 4 Einer (zeigt auf 4E), also 334.
 143 **I: Ok. Ganz toll hast du mir das erklärt (räumt AB 3 weg). So verstehe ich das sehr gut. Ok. Dann kommen wir zu etwas**
 144 **anderem. Jetzt haben wir einmal genug mit Zahlen gearbeitet (räumt Rechengeld weg). Ich habe Steine mitgebracht**
 145 **(leert Steine auf den Tisch).**
 146 F: Machen wir jetzt nur Mathe oder auch Deutsch?
 147 **I: Nein, wir machen nur Mathe.**
 148 F: Ja (freudig; laut; streckt Hand dabei in die Höhe).
 149 **I: Aber wir machen verschiedene Sachen (räumt 8 Gläser auf den Tisch). Ich habe hier Steine und die Gläser. Und jetzt**
 150 **möchte ich, dass wir in jedes Glas 10 Steine einfüllen. Und ich helfe dir aber dabei. Du musst das jetzt nicht alleine**
 151 **machen. Und wir füllen in jedes Glas 10 Steine und die stellen wir dann da auf die Seite (zeigt auf die Mitte des**
 152 **Tisches).**
 153 F: (beginnt bereits während der Erklärung zu zählen) Ja (nimmt 8 Steine in die Hand und beginnt diese flüsternd einzeln zu
 154 zählen; stoppt nach 6 Steinen; legt die Steine in die andere Hand, zählt sie von dort stumm einzeln in das Glas und ergänzt
 155 durch 2 Steine vom Haufen; füllt danach 2 Gläser gleichzeitig direkt vom Haufen: wirft zuerst je einen, dann jeweils den
 156 zweiten Stein usw. einzeln in die Gläser; stoppt bei 8 Steinen kurz; keine Lippenbewegungen erkennbar).
 157 **I: Ok, gut. Dann stelle ich die Gläser mal da her (schiebt alle Gläser in die Mitte). Kannst du mir sagen, wie viele Steine**
 158 **das sind (zeigt auf alle Gläser)?**
 159 F: Das alles (zeigt auf alle Gläser)?
 160 **I: Mhm.**
 161 F: Muss ich erst ... (beginnt die Gläser einzeln zu zählen; flüstert dabei eins, zwei, drei usw.). 80 Steine.
 162 **I: Ok. Wie bist du darauf gekommen? Wie hast du sie gezählt? Kannst du sie laut zählen?**
 163 F: Die Gläser habe ich halt gezählt. Und ich weiß ja schon, dass in den Gläsern 10 Steine sind.
 164 **I: Mhm.**
 165 F: Also es können eigentlich nur 80 Steine sein.
 166 **I: Ok.**
 167 F: Das ist 8 mal, 8 mal 10 (lacht).
 168 **I: Ok, gut. Dann schieben wir jetzt alle Steine zu dir (schiebt Gläser und die übrigen Steine auf die Seite zum Kind). Und**
 169 **jetzt möchte ich bitte, dass du mir 25 Steine daher (zeigt auf der Platz vor I) legst.**
 170 F: (beginnt Steine einzeln vom Haufen der übrigen Steine wegzuschieben; flüstert dabei die Zahlwortreihe; schiebt dabei 2
 171 Steine auf 2 Etappen zu den abgezählten Steinen, weil sie aus der Hand rutschen; stockt bei 20 Steinen; endet bei 24
 172 Steinen)
 173 **I: 25?**
 174 F: Ja.
 175 **I: Mhm. Kannst du sie auch so hinlegen, dass ich, wenn ich vorbei gehen würde, auf einen Blick erkennen könnte, wie**
 176 **viele Steine es sind?**
 177 F: (greift zu den Steinen; stockt und schaut I fragend an; beginnt die Steine zu ordnen; stockt) Hä? Wie soll ich das ... (lacht
 178 verlegen)? Ein Blick (fragend; überlegt; legt 2 Steine zur Seite). Darf ich die Steine (zeigt auf den Haufen der übrigen
 179 Steine) auch nehmen?
 180 **I: Mhm. Also es sollen 25 sein, ...**
 181 F: Ja.
 182 **I: Ja? Wie du möchtest.**
 183 F: Achso (überlegt; ordnet 5 Steine der Teilmenge zum Würfelbild). Brauch ich nicht, die Steine (zeigt auf den Haufen der
 184 übrigen Steine) noch dazu (stockt; blickt fragend zu I; ordnet neben der ersten eine zweite Fünfergruppe in Form des
 185 Würfelbildes an; stockt und überlegt; beginnt eine dritte Fünfergruppe; unterbricht und ordnet die ersten beiden
 186 Fünfergruppen schöner nach dem Würfelbild an; vollendet die dritte und eine vierte Fünfergruppe ebenfalls nach dem
 187 Würfelbild; will ersten Stein der fünften Fünfergruppe nehmen). Hach, da hab ich, da hab ich mich verzählt (nimmt einen
 188 weiteren Stein vom Haufen der übrigen Steine dazu). Waren nur 24 (ordnet die letzte Fünfergruppe in Form des
 189 Würfelbildes an; insgesamt drei Fünfergruppen in der ersten Spalte und zwei in der zweiten Spalte).
 190 **I: Ok. Also du hast es jetzt so im Würfelbild gelegt.**
 191 F: Ja (ordnet die Steine noch genauer an).
 192 **I: Ok. Super. Und ein anders Kind hat mir die 25 Steine einmal so hingelegt: Es hat 2 Gläser genommen (stellt zwei**
 193 **Gläser in die Mitte) und noch 5 Steine (schiebt 5 Steine vom Haufen zu den Gläsern; ordnet diese in der Form des**
 194 **Würfelbildes an). Kannst du mir erklären, was sich das Kind dabei gedacht hat?**
 195 F: Dass (atmet tief ein und überlegt), dass du ja schon weißt, dass (zeigt auf die 2 Gläser), dass, dass da (zeigt wieder auf
 196 beide Gläser) – aber das kann man, kann man gar nicht wissen (schaut zur Tür), dass da 10 Steine drin sind. Also wenn,
 197 (schaut und zeigt zur Tür) wenn jetzt irgendeiner hereinkommt (zeigt den Weg von der Tür zum Tisch) und nicht weiß, wie
 198 viele Steine da drin sind. Also geht das ja gar nicht.
 199 **I: Ok. Aber ich habe es ja gewusst, wie viele es sind.**
 200 F: (nickt bekräftigend)
 201 **I: Weil ich habe ja mitgeholfen.**
 202 F: Ja.
 203 **I: Und wie kommt man dann darauf, dass das 25 sind?**

- 204 F: Na, da (*zeigt auf die Fünfergruppe*) ist die 5 hingelegt, aber von weitem (*zeigt auf die Tür*) kann man es – von da (*zeigt zur*
 205 *Tür*) kann man das jetzt nicht, kann man das jetzt nicht sofort sehen, kann man nicht sofort sehen, dass es 25 Steine sind,
 206 weil dann müsste man hingehen und die Steine da drin (*zeigt in die Gläser hinein*) zählen.
- 207 **I: Genau. Aber ich weiß ja, dass 10 Steine drinnen sind (*zeigt auf die Gläser*).**
- 208 F: Ja (*nickt*).
- 209 **I: Das heißt, woher weiß ich dann, dass das (*zeigt auf die gesamte Menge*) 25 sind?**
- 210 F: Gar nicht.
- 211 **I: Auch wenn ich weiß, dass da (*zeigt auf die Gläser*) 10 drin sind?**
- 212 F: Ja dann weißt du es.
- 213 **I: Dann weiß ich es.**
- 214 F: Aber, aber wenn irgendeiner da hinein kommt, dann weiß er nicht, wie viele Steine das sind (*zeigt auf die Menge*).
- 215 **I: Ok. Aber wir gehen davon aus, dass ich komme und dass ich es weiß.**
- 216 F: Ja.
- 217 **I: Ok. Und welches gefällt dir jetzt besser (*zeigt auf die zwei Darstellungen von 25 Steinen*), wenn man davon ausgeht,
 218 dass man weiß, wie viele da im Glas drin sind (*zeigt auf die Gläser*)?**
- 219 F: Also da (*zeigt auf die Anordnung in 5 Fünfergruppen*) weiß man es jetzt, da, wie ich es gelegt habe, weiß man es jetzt ganz,
 220 ganz, weil, weil, weil bei den Fünfern, weiß man dann, dass es 25 sind (*ordnet eine Gruppe noch schöner an*), weil, weil,
 221 weil die Würfeln – jemand hat sicher schon einmal mit einem Würfel gespielt. Und deswegen weiß man dann, wenn das,
 222 wenn das (*zeigt auf eine Fünfergruppe*) – dann weiß man automatisch, dass das (*zeigt weiter auf die Fünfergruppe*), dass
 223 das, dass das 5 sind.
- 224 **I: Mhm. Ok, gut. Dann (*schiebt alle Steine und Gläser wieder zur Seite*) werde ich jetzt einmal Steine daher legen (*stellt*
 225 *5 Gläser auf die Seite und legt 3 einzelne Steine dazu*). Kannst du mir sagen, wie viele Steine das sind (*zeigt auf die*
 226 *Menge*)?**
- 227 F: Ähm (*zählt die Menge ohne Handbewegung und ohne verbale Begleitung*), 53.
- 228 **I: Ok. Kannst du es mir noch einmal laut vorzählen, wie du das jetzt gezählt hast?**
- 229 F: Da ist 4 (*zeigt auf eine Vierergruppe von Gläsern*), 1 (*zeigt auf das fünfte Glas*), also 4 plus 1 ist 5 und 3 ist dann 50.
- 230 **I: Ok. Und wie kommst du darauf? Du hast jetzt gesagt 4 (*zeigt auf die Vierergruppe*) plus 1 (*zeigt auf das einzelne*
 231 *Glas*) ist 5 und dann plus 3 ist 53. Aber 5 und 3 wären eigentlich 8. Wie bist du darauf gekommen, dass es 53 sind?**
- 232 F: Ähm, das (*zeigt auf alle Gläser*) habe ich jetzt nur die Gläser gezählt.
- 233 **I: Mhm.**
- 234 F: Und ich weiß ja, dass in den Gläsern (*zeigt nacheinander in jedes Glas hinein*) 10 Steine drin sind. Und da habe ich jetzt
 235 noch die 3 (*zeigt auf die 3 einzelnen Steine*) dazugezählt.
- 236 **I: Mhm.**
- 237 F: Kann ich eigentlich auch zählen: 40 plus 10 ist fünf, ist fünfzig.
- 238 **I: Mhm.**
- 239 F: Plus, plus 3 ist 53. Kann ich auch zählen. Aber ich hab es jetzt halt, aber ich hab es so gemacht.
- 240 **I: Ok. Dann lassen wir die da liegen (*zeigt auf die Menge 53*). Kannst du mir bitte hier (*zeigt neben die Menge 53*)
 241 daneben 35 Steine legen.**
- 242 F: (*zählt 5 Steine einzeln vom Haufen in die andere Hand und legt sie auf die Seite; zählt einzeln 10 Steine in die Hand –*
 243 *Unterbrechung und Nachzählen bei 4 Steinen – und legt diese zu den 5 dazu; Zählen durch Lippenbewegung begleitet*)
- 244 **I: (*rückt übrige Gläser näher ins Blickfeld*)**
- 245 F: (*zählt weitere Zehnergruppe einzeln in die Hand und legt diese zu den 15 Steinen dazu; zählt bei der letzten Zehnergruppe 11*
 246 *Steine und legt diese zu den 25 Steinen dazu*)
- 247 **I: Ok. 35?**
- 248 F: Ja.
- 249 **I: Kannst du mir dann bitte (*legt Ziffernkärtchen „53“ und „35“ auf den Tisch*) zu den zwei Mengen jeweils die richtige
 250 Zahl hinlegen?**
- 251 F: (*ordnet die Ziffernkärtchen prompt richtig zu*)
- 252 **I: Kannst du mir erklären, was die 3 (*zeigt auf die Einerstelle von 53*) mit dieser Menge hier (*zeigt auf die Menge 53*) zu
 253 tun hat?**
- 254 F: Die 3 (*zeigt auf die Einerstelle von 53*) sind die drei Steine (*zeigt auf die 3 einzelnen Steine*).
- 255 **I: Ok. Und die 5 (*zeigt auf die Zehnerstelle von 53*)?**
- 256 F: Die 5? Das sind sozusagen, das sind nicht sozusagen, das könnten entweder die 5 Gläser sein (*zeigt auf die 5 Gläser*) oder
 257 die 50 Steine.
- 258 **I: Ok. Gut. Und kannst du mir sagen: Bei deiner Menge (*zeigt auf die Menge 35*), wo man da die 3 sieht (*zeigt auf die*
 259 *Zehnerstelle von 35*)? Oder kannst du die Menge so legen, dass man die 3 sieht?**
- 260 F: Nein, eigentlich nicht. Ich sehe das nicht sofort, dass das (*zeigt auf die Menge*) 35 Steine sind. Dann muss ich sie ja zuerst
 261 zählen.
- 262 **I: Mhm. Aber könntest du sie so auflegen, dass man das (*zeigt auf die Zehnerstelle von 35*) erkennen kann, die 3?**
- 263 F: Ähm, ja.
- 264 **I: Na dann mach das mal.**
- 265 F: (*legt eine Fünferreihe senkrecht; legt daneben eine Zehnerreihe senkrecht; ordnet die Zehnerreihe in zwei untereinander*
 266 *liegende Fünfergruppen nach dem Würfelbild um; ordnet die Fünferreihe nach dem Würfelbild um; ordnet eine weitere*
 267 *Fünfergruppe unter der ersten an (Zwischenergebnis: 4 Fünfergruppen nach dem Würfelbild in zwei Spalten zu zwei Reihen*
 268 *angeordnet); legt rechts daneben eine weitere Spalte aus 2 Fünfergruppen nach dem Würfelbild; schaut sich um*) Kann,
 269 kann ich die Streifen (*zeigt auf Papierstreifen, die als Zahlenstrahle später verwendet werden*)?
- 270 **I: Bitte? Die (*zeigt auf die Streifen*)?**
- 271 F: Die Streifen.
- 272 **I: Ok (*gibt F 3 Streifen*).**
- 273 F: (*legt die Papierstreifen als Trennlinie zwischen die zwei Spalten und als Abschlusslinie rechts neben die letzte Spalte*)
- 274 **I: Mhm.**
- 275 F: Damit man es besser erkennen kann.
- 276 **I: Mhm. Ok.**
- 277 F: Warte, warte. Das sind ...

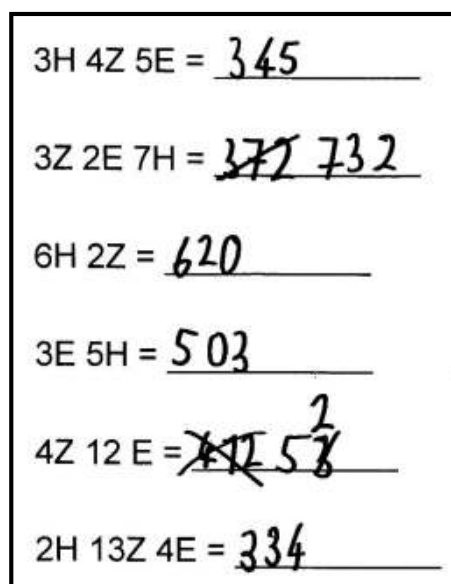
- 278 **I: (schiebt noch übrige Steine der vorher abgezählten Menge zur Seite)**
 279 **F:** Ja, da sind noch Steine.
 280 **I: Ich gebe sie dir einmal da heraus (gibt F die übrigen Steine).**
 281 **F:** (ordnet eine weitere Fünfergruppe in einer vierten Spalte rechts neben dem letzten Papierstreifen an; ein Stein bleibt übrig)
 282 Einer zu viel (legt Stein zurück zum Haufen).
 283 **I: Ok.**
 284 **F:** Warte! Ich bin noch nicht fertig.
 285 **I: Noch nicht fertig. Ok.**
 286 **F:** (holt 3 Rechengeldscheine; legt diese in die 3 Spalten als Begrenzung zwischen die Reihen der zwei Fünfergruppen einer
 287 Spalte) So, jetzt.
 288 **I: Ok. Und wo erkenne ich jetzt die 3 (zeigt auf die Zehnerstelle von 35)?**
 289 **F:** Die erkennt man (stockt, überlegt) gar nicht (lacht). Außer, außer ich mach das so (nimmt Papierstreifen zwischen den ersten
 290 zwei Spalten heraus; nimmt Rechengeldschein aus der mittleren Spalte heraus; legt Papierstreifen über die übrigen 2
 291 Rechengeldscheine horizontal als Mittellinie über alle 3 Spalten; legt übrigen Rechengeldschein als Begrenzung zwischen
 292 den ersten beiden Spalten in die untere Reihe; überlegt). Hmm (überlegt).
 293 **I: Was bedeutet die 3 da (zeigt auf Zehnerstelle von 35) in dieser Zahl?**
 294 **F:** 30, 30. Da bräuchte (zeigt auf seine Darstellung; überlegt), dann (überlegt; atmet tief ein). Da muss ich jetzt wirklich
 295 nachdenken, wie man das dann erkennen kann (überlegt; fängt an, mit den übrigen Steinen zu spielen). Darf ich jetzt auch,
 296 dass es mehr Steine sind?
 297 **I: Wie bitte?**
 298 **F:** Darf ich es auch, dass es mehr Steine sind?
 299 **I: Nein, 35 (zeigt auf das Ziffernkärtchen).**
 300 **F:** Mhm (überlegt).
 301 **I: Ok. Kannst du nicht sicher ...?**
 302 **F:** Mm.
 303 **I: Ok.**
 304 **F:** Weiß ich jetzt eigentlich nicht, wie man das jetzt machen kann, könnte.
 305 **I: Ok (stellt 3 Gläser zur Seite und nimmt 5 Steine in die Hand). Und ein anderes Kind hat mir die 35 einmal ...**
 306 **F:** Aber da ist (zeigt auf zwei Fünfergruppen der zweiten Reihe; überlegt; nimmt den großen horizontalen Mittelstreifen wieder
 307 heraus; legt den Rechengeldschein wieder als Begrenzung zwischen die zwei Fünfergruppen der zweiten Spalte; schiebt
 308 die letzte Fünfergruppe genauer in die obere Reihe; holt einen weiteren Rechengeldschein und legt diesen unter die letzte
 309 Fünfergruppe; nimmt zwei weitere Rechengeldscheine und legt diese unter die beiden ersten Fünfergruppen von links in der
 310 zweiten Reihe), so (lacht).
 311 **I: Ok. Und wo erkennt man jetzt die 3?**
 312 **F:** Könnte man also (zeigt mit einer Hand auf die beiden ersten Fünfergruppen von links in der ersten Reihe) da, die (zeigt mit
 313 einer Hand zuerst auf die zwei weiteren Fünfergruppen der ersten Reihe, dann auf die beiden ersten Fünfergruppe von links
 314 in der zweiten Reihe), könnte man, jetzt, zum Beispiel jetzt (zeigt nacheinander mit einer Hand auf die 3 Zehnergruppen
 315 bestehend aus zwei Fünfergruppen) die 5 (zeigt mit einer Hand auf die ersten beiden Fünfergruppen), noch einmal die 5
 316 (zeigt mit einer Hand auf 2 weitere Fünfergruppen), und dann noch einmal die 5 (zeigt auf die zwei Fünfergruppen in der
 317 zweiten Reihe). Das sind dann die 30, plus die 5 (zeigt auf die letzte einzelne Fünfergruppe) sind 35.
 318 **I: Ok. Sind das 5, wenn du das jetzt so nimmst (zeigt auf die ersten beiden Fünfergruppen) und sagst, oder wie meinst**
 319 **du das? Weil du gesagt hast: Da hast du es (zeigt auf die ersten beiden Fünfergruppen), und hier (zeigt auf die**
 320 **weiteren Fünfergruppen der ersten Reihe) und hier (zeigt auf die beiden ersten Fünfergruppen der zweiten Reihe).**
 321 **F:** Ja (zieht Papierstreifen zwischen den Spalten heraus).
 322 **I: Also sind das 5, oder wie viele sind das dann?**
 323 **F:** Also da, das sind jetzt (ist noch mit Papierstreifen entfernen und Steine wieder genau anordnen beschäftigt), das sind jetzt
 324 dann, das sind jetzt dann (zeigt mit einer Hand auf die ersten beiden Fünfergruppen) 10, (zeigt auf die weiteren zwei
 325 Fünfergruppe der ersten Reihe) 20, (zeigt auf die ersten zwei Fünfergruppen der zweiten Reihe) 30.
 326 **I: Ok. Also du sagst, immer das (zeigt nacheinander auf die drei Zehnergruppen bestehend aus zwei Fünfergruppen) ist**
 327 **eine Gruppe.**
 328 **F:** Ja.
 329 **I: Ok.**
 330 **F:** Warte. Könnt ich die vielleicht (schiebt die zwei Rechengeldscheine, die jeweils unter den beiden Fünferuntergruppen der
 331 Zehnergruppen liegen, zu einem Balken zusammen) – ha (erfreut).
 332 **I: Und wie groß ist da jetzt eine Gruppe? Wie viele sind da in einer Gruppe?**
 333 **F:** 10.
 334 **I: 10.**
 335 **F:** 10 Steine.
 336 **I: Und dann sieht man (rückt Ziffernkärtchen „35“ wieder näher) – das heißt, du hast hier – die 3 sind dann?**
 337 **F:** 35.
 338 **I: Ok. Gut. Ein anders Kind hat mir die 35 so gelegt (rückt die 3 Gläser und die 5 einzelnen Steine wieder ins Blickfeld).**
 339 **Wo sehe ich da die 3?**
 340 **F:** Wo ich da die 3 sehe (überlegt)?
 341 **I: Weil das sind 35 (legt Ziffernkärtchen daneben).**
 342 **F:** Da (fasst die 3 Gläser zusammen).
 343 **I: Die 3 Gläser. Mhm. Ok, gut. Dann haben wir genug mit den Steinen gearbeitet. Füllen wir sie wieder alle in den Kübel**
 344 **ein.**
 345 **F:** (räumt gemeinsam mit I weg)
 346 **I: Danke schön.**
 347 **F:** Hast du irgendwo ein Taschentuch?
 348 **I: Ja (holt ein Taschentuch und gibt es F).**
 349 **F:** (putzt sich die Nase)
 350 **I: Jetzt hab ich eine andere Frage an dich, und zwar (stellt Zehnerkarton für Eier auf den Tisch): Ich habe hier einen**
 351 **Eierkarton. Da passen 10 Eier hinein (zeigt F den offenen Eierkarton). Und jetzt hat ein Bauer in seinem Hühnerstall**

- 352 **43 Eier gefunden (legt Ziffernkärtchen „43“ auf den Tisch). Wie viele Kartons (zeigt auf den Karton) kann er voll**
 353 **machen damit?**
 354 F: (überlegt; blickt nach oben) 4.
 355 I: **Ok. Wie hast du das gerechnet? Wie bist du darauf gekommen?**
 356 F: 3 Rest.
 357 I: **Wie bitte?**
 358 F: 3 Rest.
 359 I: **Ok. 4, 3 Rest. Und wie hast du das gerechnet?**
 360 F: 4 (zeigt auf die Zehnerstelle von 43), 4, also 40, sind halt 4 Kartons, weil da (macht den Karton auf) 10 Eier hineinpassen.
 361 I: **Ok, gut.**
 362 F: Und die 3 kann man, kann man halt, wenn man jetzt beim nächsten, kann man dann halt beim nächsten mit 7 dann jetzt
 363 vollfüllen.
 364 I: **Ok (räumt Ziffernkärtchen weg).**
 365 F: Plus 7 sind dann 50.
 366 I: **Ja (legt Ziffernkärtchen „123“ auf den Tisch). Und in einem ganz großen Hühnerstall haben sie 123 Eier gefunden**
 367 **(zeigt auf das Ziffernkärtchen). Wie viele Kartons (zeigt auf den Zehnerkarton) können die voll machen?**
 368 F: (zeigt auf das Ziffernkärtchen; überlegt) 12, 3 Rest.
 369 I: **Ok. Wie hast du das gerechnet? Kannst du es laut vorrechnen?**
 370 F: Ähm, die Hundert (zeigt auf die Hunderterstelle von 123) sind 10, 10 Packungen, ...
 371 I: **Mhm.**
 372 F: ... und die 20 (zeigt auf die Zehnerstelle von 123) sind 2 Packungen, also 12 Packungen. Und die 3 kann man, die bleiben
 373 übrig.
 374 I: **Ok, gut (räumt Zehnerkarton und Ziffernkärtchen weg). Eine andere Frage: Hans hat schon 47 Euro gespart (legt**
 375 **Ziffernkärtchen „47“ auf den Tisch). Und er möchte sich einen Elektrobaukasten kaufen, der 87 Euro kostet (legt**
 376 **Ziffernkärtchen „87“ daneben auf den Tisch). Wie viel Geld fehlt ihm noch?**
 377 F: Ähm (überlegt; blickt auf die Ziffernkärtchen; zeigt abwechselnd darauf). Genau, 40.
 378 I: **Ok. Und wie hast du das jetzt gerechnet?**
 379 F: Weil 4 plus 4 8 ist.
 380 I: **Und wieso sind es dann 40, wenn 4 plus 4 8 ist?**
 381 F: Weil, 4 (zeigt auf die Zehnerstelle von 47), weil 4 plus 4 8 ist (schiebt die Ziffernkärtchen näher zusammen), dann fehlen ihm
 382 noch 40, weil er bei (zeigt auf Zehnerstelle von 47) - 47 hat, und er kostet 87 (zeigt auf das Ziffernkärtchen 87). Die 7 hat er
 383 schon. Fehlen ihm nur noch die 40 und dann hat er 87.
 384 I: **Ok, gut. Und der Herr Lehrer, der möchte sich ein I-Pad kaufen. Und diese I-Pad kostet 579 Euro (legt Ziffernkärtchen**
 385 **„597“ auf den Tisch). Und er hat schon 279 Euro gespart (legt Ziffernkärtchen „279“ auf den Tisch). Wie viel fehlt**
 386 **ihm jetzt noch?**
 387 F: Ähm (schaut auf die Ziffernkärtchen; überlegt), 300 Euro.
 388 I: **Und wie bist du da jetzt so schnell draufgekommen?**
 389 F: Weil, die 7 und die 9 (zeigt auf die Zehner- und Einerstelle von 279), also die neunund, die 79 hat er schon. Fehlen ihm
 390 eigentlich nur noch 300, weil 2 plus 3 ist 500.
 391 I: **Ok, gut.**
 392 F: Und ein I-Pad hat er schon.
 393 I: **Oh. Na dann ist es ein anderer Herr Lehrer.**
 394 F: (lacht)
 395 I: **Gut. Eine andere Aufgabe: Kannst du bitte von 357 in Zehnerschritten rückwärtszählen.**
 396 F: Dreihundert (blickt fragend), in Zehnerschritten. 357?
 397 I: **Mhm.**
 398 F: Ähm (überlegt angestrengt; atmet tief durch), da bleiben aber 5 übrig, wenn ich das mache.
 399 I: **Wie meinst du das?**
 400 F: Da bleiben, da bleiben, da bleiben 5, 5 Nummern übrig, weil, weil wenn ich jetzt von 5 zu, wenn ich jetzt von 375, wenn ich
 401 jetzt von 375 zu drei, 365, dann müssen dann, dann müssen, dann ist das Letzte dann 5. Also dann bleiben ja 5 übrig.
 402 I: **Achso. Ja, du musst nicht bis 0 zählen, das macht nichts. Fang einmal an zu zählen und ich sage dann schon stopp,**
 403 **wenn es so weit ist, ok?**
 404 F: Ok.
 405 I: **Von 357.**
 406 F: 375, 365, drei, 355 (stockend), dreihundertvierund, 45, 335, 325, 315 (atmet tief ein), 305, 295, 285, 275.
 407 I: **Ok, super, danke. Kannst du dir bitte die Zahl 357 einmal aufschreiben (schiebt Zettel und Stift zu F)?**
 408 F: (schreibt 357 stockend in der Reihenfolge HEZ auf)
 409 I: **Ok. Kannst du davon (zeigt auf 357) auch rückwärtszählen, in Zehnerschritten?**
 410 F: Hmm (schaut die Zahl angestrengt und fragend an; überlegt). Nein, kann man eigentlich nicht (langsam, überlegend).
 411 I: **Kann man nicht – in Zehnerschritten rückwärtszählen?**
 412 F: Wegen den 2 von der 7 kann man, da, eigentlich (überlegt) kann man das schon. Man kann es. Es geht, aber (überlegt), es
 413 ist jetzt nicht gerade leicht.
 414 I: **Ok. Du kannst es mir auch aufschreiben (legt AB Zahlenstrahl zu F). Also von 357 (zeigt auf die Startzahl am**
 415 **Zahlenstrahl) rückwärts in Zehnerschritten (zeigt auf die weiteren leeren Kästchen am Zahlenstrahl). Du hast ja**
 416 **ganz toll von 375 rückwärts gezählt.**
 417 F: (schreibt 3 an die Hunderterstelle; zögert; schreibt 4 an die Zehnerstelle; überlegt und blickt nach oben; schreibt 3 an die
 418 Einerstelle; Ergebnis 343)
 419 I: **Ok. Wie bist du darauf jetzt gekommen?**
 420 F: Weil (überlegt) 7 (überlegt) 7 (überlegt), warte (überlegt; blickt nach oben). Nein, warte (überlegt; blickt nach oben). Ah, das
 421 ist falsch (streicht 3 an der Einerstelle durch; schreibt 8 darüber). Jetzt. 348, weil die 5 von der 7 und noch die 2 von der 7
 422 sind dann 348.
 423 I: **Kannst du mir das noch einmal erklären? Das habe ich jetzt noch nicht ganz verstanden, wie du das gerechnet hast.**
 424 F: Also, jetzt die 3 (zeigt auf die Hunderterstelle von 357) von 300 das bleibt. Die 5 (zeigt auf die Zehnerstelle von 357) gehen
 425 halt jetzt zu 4 (zeigt auf die Zehnerstelle von 348), weil, weil 7 ja nicht 10 ist.

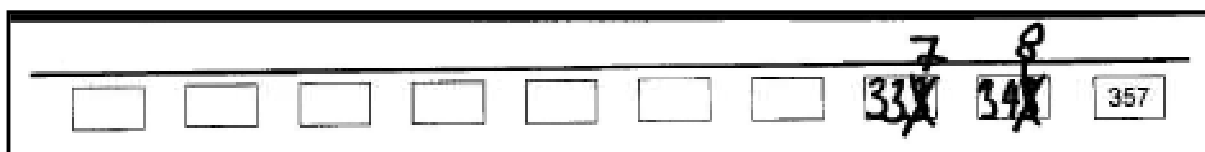
- 426 **I: Mhm.**
427 F: Und (*überlegt*) dann zählt man halt die 7 zurück, ich mein, dann zählt man jetzt die 5 zurück plus die 2. Also sind es dann
428 348.
429 **I: Jetzt habe ich verstanden, wie du gedacht hast. Kannst du dann noch weiter in Zehnerschritten rückwärtszählen?**
430 F: (*schreibt 3 an die Hunderterstelle; überlegt 11 Sekunden; schreibt 3 an die Zehnerstelle; überlegt; blickt fragend zu I*)
431 **I: Du kannst ruhig auch laut rechnen und denken. Dann höre ich es gleich.**
432 F: Aha, ok. Drei-hund-dert. Dann muss ich mit - ist 8 (*stockend; überlegt insgesamt 16 Sekunden; schreibt 3 an die Einerstelle*).
433 Nein (*streicht 3 an der Einerstelle durch*), ist 7 (*flüstert; schreibt 7 an der Einerstelle darüber; legt den Stift weg; schaut sein*
434 *Ergebnis skeptisch an; blickt fragend zu I*).
435 **I: Gut. Dann passt das mit Rückwärtszählen. Wo ist der Stöpsel für den Stift? Hast du den noch?**
436 F: (*gibt I den Stöpsel*)
437 **I: Danke. Die vorletzte Aufgabe schon: Oma Herta hat 2 Enkelkinder. Und sie möchte beiden gleich viel zu Weihnachten**
438 **schenken, gleich viel Geld, ok?**
439 F: (*nickt*)
440 **I: Sie hat aber nur einen Hunderteuroschein zu Hause und 4 Zehneuroscheine. Was könnte sie machen?**
441 F: Wie viele Kinder will sie jetzt gleich?
442 **I: 2.**
443 F: 2? Ähm, jedem gibt sie (*stockend; überlegt 16 Sekunden*) 5, nein, 70 Euro?
444 **I: Mhm.**
445 F: Ja, 70 Euro.
446 **I: Und wie kann sie das machen? Sie hat nur einen Hunderteuroschein und 4 Zehneuroscheine.**
447 F: Dann wechselt sie halt (*lacht*).
448 **I: Ok. Und was wechselt sie dann?**
449 F: Ähm, sie wechselt 2 Fünfziger, und sonst, also, den Hunderter gibt sie her und 2 Fünfziger kriegt sie halt. Dann hat sie 2
450 Fünfziger. Dann gibt sie halt einem Kind 50, plus, plus, plus einen Zwanziger. Hat, hat, wie viel hat sie? 1, 2, 3, 4 Zehner.
451 **I: 4 Zehner hat sie.**
452 F: Dann, also, also 2 Zehner, das sind dann 70, plus, plus 70. Dann kann sie halt das restliche Geld ihm geben, das sind auch
453 70.
454 **I: Super. Ganz toll erklärt. Und dann kommen wir schon zu den letzten Fragen. Was ist die Hälfte von 4?**
455 F: 2 (*schüttelt den Kopf über die leichte Frage*).
456 **I: Und die Hälfte von 40.**
457 F: 20.
458 **I: Und wieso hast du das so schnell gewusst?**
459 F: Weil ich das schon seit der ersten Klasse weiß?! Und weil 2 plus 2 40 ist, ich meine 2 plus 2 4 ist.
460 **I: Mhm. Und wieso weißt du das dann bei 40 auch so schnell?**
461 F: Weil 20 plus 20 auch 40 ist. Also es ist dasselbe nur halt mit einem Nuller dran.
462 **I: Ok. Und was ist die Hälfte von 90?**
463 F: Ähm (*überlegt kurz*), 45.
464 **I: Und wieso hast du das so schnell gewusst?**
465 F: Weil ich erstens die Neunerreihe kann, und weil 40 plus 40 ist 80.
466 **I: Mhm.**
467 F: Plus zwei Fünfer. Also 45 plus 45 ist dann halt noch 10 plus, also 80 plus 10 ist 90.
468 **I: Gut. Was ist die Hälfte von 200?**
469 F: Ähm (*überlegt kurz*), 100.
470 **I: Und die Hälfte von 600?**
471 F: (*prompt*) 300.
472 **I: Und von 700?**
473 F: Ähm (*blickt nach oben und überlegt*), 350.
474 **I: Und wie bist du darauf jetzt gekommen?**
475 F: Weil 300 plus 300 ist 60, plus 50 plus 50 ist 100 also 70, 700.
476 **I: Ok. Und die Hälfte von 500?**
477 F: Die Hälfte von 500 ist (*überlegt kurz*) 250.
478 **I: Und wie hast du das jetzt so schnell herausgefunden?**
479 F: Weil 200 plus 200 ist 40, plus, plus 50 plus 50 ist 100, ist halt dann, ist halt dann, ist halt 200 plus 200 ist 40 plus 100 ist 50.
480 **I: Ok. Aber wir hatten ja 500 und nicht 50?**
481 F: Also 500.
482 **I: Ok, gut. Das war es auch schon. Danke vielmals.**



Kind F – geschriebene Zahlen



Kind F – AB 3



Kind F – AB Zahlenstrahl

8.8 Im Zuge der Interviews verwendete Arbeitsblätter

Preisliste von Fahrrädern
365,- €
536,- €
653,- €
563,- €
635,- €
356,- €

Preisliste für Fahrräder

3H 4Z 5E =	_____
3Z 2E 7H =	_____
6H 2Z =	_____
3E 5H =	_____
4Z 12 E =	_____
2H 13Z 4E =	_____

Arbeitsblatt 3

										357
----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	-----

Arbeitsblatt Zahlenstrahl

„Ich erkläre, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit selbst verfasst habe und dass ich dazu keine anderen als die angeführten Behelfe verwendet habe. Außerdem habe ich die Reinschrift der Bachelorarbeit einer Korrektur unterzogen und ein Belegexemplar verwahrt.“



Lebenslauf

Name: Birgit Mühlgassner

Geburtstag und -ort: 26.08.1985, Wien

Staatsbürgerschaft: Österreich

Religionsbekenntnis: röm.-kath.

Schulbildung: 1991 - 1995 Öffentliche Volksschule Eisenstadt
1995 - 2003 Bundesgymnasium Eisenstadt
2003 - 2010 Veterinärmedizinische Universität Wien
2010 - dato Kirchliche Pädagogische Hochschule
Wien/Krems (Standort Wien)

Zusatzqualifikationen: 2011 – 2012 Sportinstructorin mit dem Schwerpunkt
Trampolinturnen
2012 Begleitlehrerin für alpinen Skilauf

Berufliche Tätigkeit: 2008 - 2010 Ordinationshilfe der Tierarztpraxis Rankgasse,
1160 Wien
2013 - dato Volksschullehrerin in der Volksschule
Ruckergasse 42, 1120 Wien