Schriftliches Dividieren, Teil I:
Einige Anregungen zur Erarbeitung in der dritten Schulstufe

> “Naja, sagte der Zahlenteufel und grinste. Ich will ja nichts gegen deinen Lehrer sagen, aber mit Mathematik hat das wirklich nichts zu tun. Weißt du was? Die meisten Mathematiker können überhaupt nicht rechnen. Außerdem ist ihnen dafür die Zeit zu schade. Für so was gibt es doch Taschenrechner. … Ein bisschen Einmaleins, dagegen ist ja nichts einzuwenden. Kann ganz nützlich sein, wenn einem die Batterie ausgeht. Aber Mathematik, mein lieber Schwan! Das ist ganz was anderes!“
>
> Hans Magnus Enzensberger, Der Zahlenteufel, dtv-Verlag

0) Vorbemerkung

Das schriftliche Dividieren ist unter den schriftlichen Grundrechenverfahren eindeutig dasjenige, welches die höchsten Anforderungen stellt, in zweifacher Hinsicht:

- Einerseits verlangt es in den einzelnen Rechenschritten *sicheres Kopfrechnen* in allen vier Grundrechenarten (klarerweise das Dividieren im Bereich des kleinen Einmaleins selbst, damit aber eben auch das Multiplizieren; dazu das Addieren bei den Teilmultiplikationen mit Übertrag, weiters das Subtrahieren oder – je nach Verfahren - Ergänzen zur Restermittlung).
- Andererseits ist das Verfahren selbst eine recht komplexe Abfolge von Schritten – weit komplexer als das relativ einfach „gestrickte“ Additionsverfahren, aber auch jene der schriftlichen Subtraktion und Multiplikation.

Dementsprechend groß sind die Probleme vieler Kinder beim Erlernen dieses Verfahrens; und wir sprechen dabei keineswegs nur von den sogenannt „rechenschwachen“ Kindern. Aus langjähriger Erfahrung halten wir diese Probleme für in den meisten Fällen lösbar. Allerdings haben wir, gleichfalls aus langjähriger Erfahrung, den Eindruck gewonnen, dass das Erlernen dieses objektiv nicht einfachen Verfahrens oft unnötig erschwert wird. Daher wollen wir im Folgenden einige didaktische Anregungen für die Erarbeitung der schriftlichen Division geben – und damit, wie immer, zur Diskussion stellen: kritische Rückmeldungen unter rechnen@inode.at sind uns hoch willkommen!

Uns wäre aber höchst unwohl dabei, auf diesem Feld Anregungen für die Erarbeitung zu geben, ohne zugleich anzumerken, dass den schriftlichen Rechenverfahren im allgemeinen, der schriftlichen Division (und hier wiederum der schriftlichen Division mit zweistelligem Divisor) im besonderen im Unterricht der Volksschulen (jedenfalls in Österreich) unseres Erachtens eine viel zu hohe Bedeutung beigemessen wird.

Maßgebliche Mathematik-Fachdidaktiker fordern seit Jahren eine Neubewertung der schriftlichen Rechenverfahren im Unterricht der Grundschule (zur Diskussion vergleiche etwa Radatz/Schipper/Dröge/Ebeling (1999): Handbuch für den Mathematikunterricht, 3. Schuljahr, Hannover: Schroedel). Dabei will wohl niemand die schriftlichen Verfahren „abschaffen“; die Frage muss aber gestellt werden, *zu* *welchem Zweck* und daher *in welcher Form* die schriftlichen Verfahren im Zeitalter des Taschenrechners noch Thema des Unterrichts sein sollen. Die (fachwissenschaftliche) Diskussion geht recht einhellig in Richtung einer stärkeren Betonung von Kopfrechnen (das freilich auch „halbschriftlich" gestützt werden kann und soll) und überschlagendem Rechnen; bei Vermittlung der schriftlichen Verfahren sollte der Hauptaugenmerk darauf gelegt werden, dass der Zusammenhang der Rechenschritte mit der zu Grunde liegenden Operation verstanden wird, es sollte also um Einsicht in das Verfahren gehen an Stelle eines bloßen „Regelbefolgens".

Der Niederschlag dieser fachdidaktischen Diskussion in der österreichischen Schulpraxis ist unserer Einschätzung nach gleich null. Und das ist ein Jammer!

Weil aber Jammern den betroffenen Kindern nichts nützt, versuchen wir einerseits (unter anderem mit diesem Beitrag), eine solche Diskussion auch hierzulande anzuregen – natürlich mit der Hoffnung auf eines nicht allzu fernen Tages nachfolgende Änderungen in der schulischen Praxis.

Andererseits bieten wir eben die nachfolgenden didaktischen Anregungen: Denn welcher Stellenwert immer dem schriftlichen Dividieren in Zukunft im Unterricht beigemessen wird, seine didaktische Vermittlung bleibt in jedem Fall eine spannende, anspruchsvolle Aufgabe. Und wie stets in Fragen der Didaktik geht es auch hier – wie Günter Krauthausen zu Recht betont – nicht um „Rezepte mit Wirkungsgarantie", sondern um „Wahrscheinlichkeitsaussagen": Ziel dieser Anregungen ist es also, „Wahrscheinlichkeiten für besseres Lernen und Lehren zu erhöhen" (vgl. Krauthausen, G. (2003): Entwicklung arithmetischer Fertigkeiten und Strategien – Kopfrechnen und halbschriftliches Rechnen. In: Fritz A./Ricken, G./Schmidt, S. (Hrsg.): Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie. Weinheim, Basel, Berlin: Beltz).

1) Verständnis des Dividierens sowohl als Verteilen wie auch als Enthaltensein
Schriftliches Dividieren ist kaum verstehbar, wenn nicht das Dividieren selbst sowohl als Verteilen wie auch als Enthaltensein verstanden wird: Gefordert ist ein flüssiges „Hin und Her" zwischen beiden Grundvorstellungen (zur Begründung siehe weiter unten).

Die Erarbeitung eines Operationsverständnisses für das Dividieren beginnt üblicher Weise bereits in der ersten Schulstufe und ist ein wesentliches Thema in der zweiten Schulstufe, nähere Ausführungen auch zu diesen grundlegenden Lernschritten würden den Rahmen dieses Beitrags sprengen, siehe dazu aber etwa Gaidoschik M. (2002): Rechenschwäche – Dyskalkulie. Eine unterrichtspraktische Einführung für LehrerInnen und Eltern. Wien : öbv-htp oder Radatz, H./Schipper, W., Ebeling, A./Dröge, R. (1998): Handbuch für den Mathematikunterricht, 2. Schuljahr. Hannover: Schroedel.

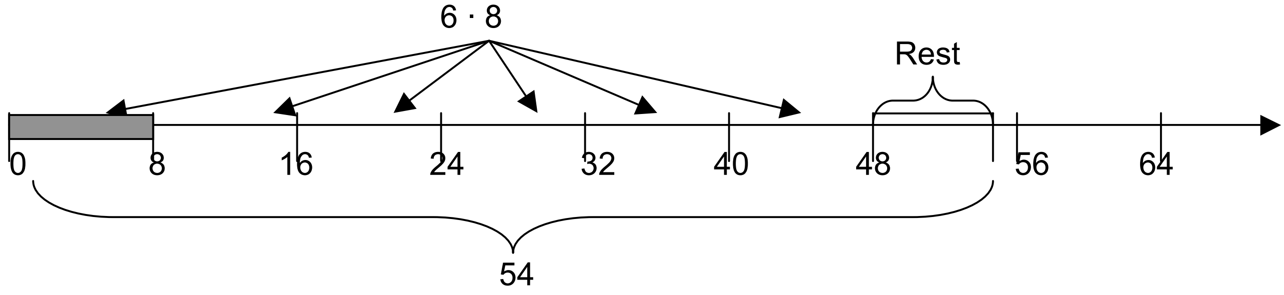
Nun zeigt aber die Erfahrung, dass viele Kinder (und Erwachsene!) anhaltende Schwierigkeiten mit dieser „Zweideutigkeit“ des Dividierens haben.

Daraus folgt:

- Besondere Sorgfalt bei der ersten Erarbeitung in der ersten und zweiten Schulstufe. Die beiden Aspekte in der Erarbeitung sollten (entgegen den Vorgaben der meisten Schulbücher!) zunächst sorgfältig getrennt werden; es sollte zunächst nur *ein* Aspekt (empfehlenswerter Weise zuerst das Enthaltensein), dann der andere jeweils für sich erarbeitet werden; erst wenn jeder Aspekt für sich geklärt ist, gilt es, beide auch in ihrem Zusammenhang zum Gegenstand des Unterrichts zu machen.
- Auch im weiteren Verlauf (bis zur vierten Schulstufe!) sollte immer wieder das Operationsverständnis für die Division zu einem eigenständigen Thema im Unterricht gemacht werden: Kinder sollten immer wieder dazu aufgefordert werden, zu einer Division passende Handlungen, Zeichnungen (beim Teilen nur eingeschränkt durchführbar) und Sachsituationen zu finden; und dabei sollten jeweils beide Aspekte beachtet werden!
- Dafür sollten auch immer wieder „ausführliche Sprechweisen“ eingefordert werden, z.B. für „12 : 4“ entweder „12 wird auf vier Kinder/Portionen verteilt, jedes bekommt 3“ oder aber „12 wird in lauter Vierer-Portionen aufgeteilt; es gehen sich 3 solche Viererportionen aus“.
- Bei Verwendung der „in“-Sprechweise sollte immer wieder thematisiert werden: Wie heißt dieselbe Rechnung in „geteilt“-Sprechweise?, also z.B.: „4 in 12“ kann ich auch so rechnen: „12 durch 4“ Und dasselbe auch in umgekehrter Richtung!
- Wohlgemerkt: Bei all dem kommt es darauf an, dass die Kinder das Dividieren in beiden Grundvorstellungen erkennen und praktisch anwenden können. Nicht notwendig (und wohl als Forderung an alle Kinder zu hoch gegriffen) ist die Unterscheidung auf begrifflicher Ebene, also das Zuordnen der Fachausdrücke „Teilen“ und „Messen“ zu vorgegebenen Texten!

2) Ein Vorschlag zur Erarbeitung des Dividierens mit Rest: Messen am Zahlenstrahl

Vorgestellt am Beispiel „54 : 8“:



Voraussetzung:

- Vertrautheit mit dem Zahlenstrahl als Längendarstellung von Zahlen
- Operationsverständnis der Division (ohne Rest) als Enthaltensein

Material:

- Großzügig dimensionierter Wand-Zahlenstrahl, am besten mit Einermarkierungen nur bis 10, dann nur noch Zehnermarkierungen.
- Bunter Kartonstreifen. Dieser wird am Wand-Zahlenstrahl auf die Länge „8 Einer“ zurechtgeschnitten.

Schritte:

1. „54 : 8“ heißt (Operationsverständnis für das Enthaltensein!): Wie oft passt der Streifen der Länge „8“ in die Gesamtlänge „54“? Das ausprobieren lassen.
2. Es geht sich 6mal aus, ein siebentes Mal nicht mehr.
3. Mit 6mal 8 komme ich aber nur bis 48, es bleibt Rest. Diesen Rest als Strecke von 48 bis 54 mit Farbe markieren lassen.
4. Wie berechne ich den Rest? Zumeist wird in dieser Anordnung das Kind von selbst draufkommen: 48 + ? = 54 oder 54 – 48 = ?
5. An beliebigen anderen Beispielen wiederholen, bis selbständige Durchführung in allen Schritten kein Problem mehr.

Vorteile dieser Erarbeitung:

- Lässt sich später problemlos auf zweistelligen Divisor übertragen!
- Die Ermittlung des Rests als „und wieviel?“ wird besonders transparent.

Zur Entlastung bei Kindern mit Kopfrechendefiziten und als Vorbereitung des schriftlichen Divisions-Verfahrens sinnvoll: Paralleles Aufschreiben

- Zunächst die 3 Schritte getrennt anschreiben, am Beispiel „27 : 6“

  1. Schritt: Wie oft geht es sich aus?

  Aufgeschrieben: 27 : 6 = 4mal, mit Rest

  2. Schritt: Bis wohin am Zahlenstrahl komme ich genau? (Mal-Rechnung)

  Aufgeschrieben: 4 · 6 = 24

  3. Schritt: Wie viel bleibt Rest? (Und wieviel-Rechnung)

  Aufgeschrieben: 24 + __ = 27, Ergebnis: 3

- Dann eine abgekürzte Schreibweise mit Doppelpunkt erarbeiten:

27 : 6 = 4	Dazu gesprochen:	1) 6 in 27 = 4 mal
- <u>24</u>		2) 4mal 6 = 24
3 R.		3) Wie bei schriftlicher Subtraktion

Auf dieser Grundlage kann und soll durchaus auch auf eine Bewältigung solcher Aufgaben als „reine Kopfrechnung“ hingearbeitet werden; wenn aber einzelne Kinder das Aufschreiben länger (oder vielleicht sogar auf Dauer) brauchen: Warum nicht?

3) Erarbeitung des Verfahrens der schriftlichen Division mit Material

Geeignetes Material:
- Dezimalsystem-Material (Hunderterplatten, Z-Stangen, E-Würfel)

oder, wegen des Realitätsbezuges fast besser:
- Rechengeld (nur Hunderter, Zehner, Einer verwenden!)

Zusätzlich eventuell
- Teller/Schachteln/Puppen als „Empfänger“, auf die verteilt wird.

<u>Schwierigkeitsstufen:</u>

<u>1. Stufe: Zahl lässt sich ohne Rest Stelle für Stelle verteilen, Beispiel 824 : 2</u>

Schritte:
- Kinder nehmen sich 8 H-Tafeln, 2 Z-Stangen, 4 E-Würfeln
- Sicherung des Operationsverständnisses: Kinder müssen verstanden haben, dass es darum geht, diese 824 auf 2 Personen gerecht zu verteilen!
- Kinder sollen selbst überlegen, wie sie dieses Verteilen durchführen können
- Ob sie dabei mit H oder E beginnen, ist hier noch gleichgültig und sollte ruhig dem einzelnen Kind überlassen bleiben!
- Erst nur handelnd. Später parallel zum Handeln gemeinsam aufschreiben (s.u.).
- Dann nachträglich aufschreiben lassen, Schritte in der Erinnerung wiederholen.
- Dann ohne Material durchführen, Schritte in der Vorstellung durchführen und notieren lassen.

<u>2. Stufe: Zahl lässt sich nur mit Rest an einer Stelle verteilen, Beispiel 834 : 2</u>
- Kinder verteilen Stelle für Stelle, wie gehabt.
- Problem: 1 Z bleibt übrig, was tun?
- Lösung nach Möglichkeit Kinder selbst entdecken lassen (wird gelingen, wenn Stellenwertsystem verstanden wurde!): Der übrig gebliebene Zehner kann in 10 Einer getauscht werden. Diese können dann problemlos aufgeteilt werden.
- Erst auf Grundlage dieses Problems wird verständlich: Beim Verteilen ist es besser, mit der größten Stelle beginnen (sonst wird es umständlich beim parallelen Aufschreiben)!
- Daher ab jetzt zur Gewohnheit machen: Beim Verteilen ist es (anders als bei Plus, Minus, Mal) geschickter, mit der größten Stelle zu beginnen – nicht als unverstandene Regel, sondern aus Einsicht!

3. Stufe: Zahl lässt sich nur verteilen, wenn man schon zu Beginn, an der größten Stelle, umtauscht, Beispiel 324 : 4

- 3 H sind zu wenig, um sie an 4 Kinder zu verteilen. Was tun?
- Tauschen! 3 H = 30 Z. Zum Verteilen gibt's nun 32 Z!
- Nur auf dieser Grundlage später beim Aufschreiben das „Hakerl“ verstehbar!

4) Erarbeitung der Schreibweise

4.1. In der Phase des Verteilens mit Material, am Beispiel 316 : 4 = ?

Zunächst getrenntes Anschreiben der Stellen:

3 H : 4 =
1 Z : 4 =
6 E : 4 =

Dann Verteilen (zuerst mit Material, später in der Vorstellung), parallel dazu sprechen/anschreiben:

3 H : 4 ???	*Geht nicht!*	➔	3 H = 30 Z!
31 Z : 4 = 7 Z	$4 \cdot 7 = 28$	➔	Rest: 3 Z = 30 E!
36 E : 4 = 9 E	$4 \cdot 9 = 36$	➔	Kein Rest!

Zuletzt: Anschreiben als *eine* Rechnung:

$\overline{3\ 1}|6 \ : \ 4 \ = \ 7\ 9$ Hakerl deutlich machen als: Ich tausche die H in Z und verteile dann insgesamt 31 Z, s.u.!

4.2. Wenn Ablauf automatisiert: Hin zur "ausführlichen Schreibweise"

$$
\begin{array}{rl}
 & \overline{3\ 1}|6 \ : \ 4 \ = 7\ 9 \\
- & \underline{2\ 8} \\
 & \ \ 3\ 6 \\
- & \ \ \underline{3\ 6} \\
 & \ \ \ \ 0 \text{ Rest}
\end{array}
$$

Dieses Anschreiben der Teilmultiplikation (mit nachfolgender schriftlicher Subtraktion zur Restermittlung) ist in den meisten Ländern üblich – nur in Österreich leider immer noch weitgehend unbekannt. Der „Lehrplan“ trägt daran übrigens keine Schuld: dieser überlässt es der Lehrerin/dem Lehrer, mit welcher Schreibweise er die schriftliche Division erarbeitet!

Dabei hat die ausführliche Schreibweise wesentliche Vorteile gegenüber der in hiesigen Schulbüchern üblichen verkürzten Schreibweise:

- Die einzelnen Schritte sind transparenter, können besser nachvollzogen werden.

- Wenn es beim Abschätzen zu Fehlern kommt (einmal zu oft/einmal zu wenig oft genommen etc.), dann sind solche Fehler für das Kind leichter zu entdecken und in Folge selbst zu korrigieren.
- Da die Restermittlung als schriftliche Subtraktion durchgeführt wird, fallen Schwächen beim Kopfrechnen weniger ins Gewicht, das Arbeitsgedächtnis ist weniger belastet, die Konzentration kann verstärkt dem Verfahren selbst gewidmet werden.

Alle genannten Vorteile werden in besonderer Weise deutlich beim schriftlichen Dividieren mit zwei- oder mehrstelligem Divisor (vierte und fünfte Schulstufe), wo spätestens nicht nur „rechenschwache“ Kinder (wie ja auch Erwachsene!) das Dividieren mit verkürztem Anschreiben als äußerst beschwerlich und fehleranfällig erleben. Wer aber erreichen will, dass Kinder Divisionen in der vierten Schulstufe in ausführlicher Schreibweise (und auf diese Weise leichter!) bewältigen, der sollte Ihnen eben diese Schreibweise bereits von Anfang an vermitteln.

Noch ein Wort zum „Hakerl“

- Das „Hakerl“ für die Bestimmung der Stellen im Ergebnis soll vom Kind aus der Verteil-Handlung heraus verstanden werden (s.o.)
- Nur dann kann das Kind verstehen, was das Hakerl mit der Anzahl der Stellen im Ergebnis zu tun hat: „Zum Verteilen sind zu wenige H da, ich muss die H also in Z umtauschen. Womit ich beim Verteilen also wirklich anfangen kann, sind Zehner. Darum gibt es auch im Ergebnis nur Z und E.“
- Auf dieser Grundlage von Anfang an als Gewohnheit sinnvoll: Gleich nach dem „Hakerl“ auch „Punkte“ für die Stellen im Ergebnis machen!
- Wird das „Hakerl“ gewohnheitsmäßig oben angebracht, erleichtert das später das Dividieren von Dezimalzahlen (keine Überschneidung von „Hakerl“ und Komma möglich).

Teil 2 mit Anregungen für die schriftliche Division mit zweistelligem Divisor folgt! Bei Fragen, Einwänden, weiter gehenden Anregungen bitten wir um Ihr Mail unter rechnen@inode.at !

Autor: Michael Gaidoschik