„Das muss man sich einfach merken“???

Schwierigkeiten mit dem Einmaleins: Einige Anregungen für Vorbeugung und Abhilfe

Autor: Michael Gaidoschik
(Überarbeitete und erweiterte Fassung, Oktober 2009)

Die Erarbeitung des kleinen Einmaleins gehört zu den Kernaufgaben der zweiten und dritten Schulstufe. Doch gerade diese Hürde scheint für viele Kinder dauerhaft unüberwindbar zu sein. Nun muss auch für diesen Bereich mathematischer Lernschwierigkeiten als eine mögliche Quelle von Ursachen der *Unterricht* mit in Betracht gezogen werden.

Der nachfolgende Beitrag weist daher im ersten Teil auf Gefahren hin, welche bestimmte Formen des schulischen Einmaleins-Unterrichtes in sich tragen. Dabei geht es nicht um das Wälzen von Schuldfragen, sondern darum, die mit den Gefahren zugleich benannten Chancen der Vermeidung von dauerhaften Schwierigkeiten mit dem Einmaleins deutlich zu machen.

Im zweiten Teil des Beitrags werden konkrete Anregungen dafür gegeben, wie das Einmaleins im Unterricht des zweiten Schuljahres so aufbereitet werden könnte, dass möglichst viele Kinder möglichst gute Lernchancen vorfinden. Die Anregungen gründen auf der aktuellen Fachdidaktik der Grundschulmathematik. Es sind wohlgemerkt Anregungen, keine Rezepte, und schon gar keine Patentrezepte mit Wirkungsgarantie – einfach deshalb, weil es so etwas in pädagogisch-didaktischen Fragen seriöser Weise nicht geben kann. Erfahrungsberichte von LehrerInnen, die versucht haben, diese Anregungen auf ihre individuelle Weise umzusetzen, sind freilich äußerst ermutigend (siehe dazu den Beitrag von Gabriele Fohringer).

Weitere Erfahrungsberichte, Ergänzungen, natürlich auch Einwände werden gerne auf diesen Seiten veröffentlicht! Wir bitten um Mails an institut.wien@rechenschwaeche.at !

1. Was im Unterricht vermieden werden sollte

1.1 Gefahr Nummer eins: Zu früh!

Zu früh – das heißt auch beim kleinen Einmaleins: Dem Kind wird ein neuer Lernschritt abverlangt, obwohl es über die mathematischen Voraussetzungen dieses Schrittes noch nicht mit ausreichender Sicherheit verfügt.

Hier liegt natürlich zum einen ein grundsätzliches Problem vor: Kinder lernen nun einmal (von immer schon unterschiedlichen Voraussetzungen ausgehend) unterschiedlich rasch. Was für das eine Kind in einer Klasse zu früh ist, mag für das andere (oder vielleicht sogar für den Großteil der anderen) gerade zur rechten Zeit kommen.

Umso wichtiger ist es, sich der vielfältigen Voraussetzungen für die Automatisation des kleinen Einmaleins bewusst zu sein. Die Lehrerin muss im Rahmen ihrer Möglichkeiten das Vorhandensein oder eben Nichtvorhandensein dieser Voraussetzungen möglichst individuell abklären. Wenn sie sich dann mit Blick auf den Lernstand der Klasse entschließen sollte, in die Automatisation des kleinen Einmaleins einzusteigen, obwohl das eine oder andere Kind dieser Klasse noch nicht über die dafür nötigen Voraussetzungen verfügt, dann muss sie sich auch darüber im klaren sein, dass eben dieses eine oder andere Kind den neuen Schritt noch nicht mitmachen kann.

Wenn es das dennoch *muss*, sind Schwierigkeiten unausweichlich. Hier wäre also ein konsequent differenzierender Unterricht gefragt – und, gemeinsam mit den Eltern, ein Ausloten aller Möglichkeiten schulischer wie außerschulischer Zusatz-Förderung genau in den Bereichen, in denen das Kind über noch unzureichende Voraussetzungen für das Einmaleins-Lernen verfügt.

Die Gefahr des „Zu früh!“ besteht aber gerade beim kleinen Einmaleins nicht nur in Bezug auf einzelne Kinder. Die Voraussetzungen für diesen entscheidenden Lernschritt reichen nämlich weiter, als es selbst einigen Schulbuchautor(inn)en bewusst sein dürfte (siehe weiter unten). Deshalb sollen die drei wesentlichen dieser Voraussetzungen im Folgenden kurz aufgelistet und verdeutlicht werden:

Voraussetzung 1: Sicherheit im Operationsverständnis
Auch wenn das Operationsverständnis zumeist bereits Ende des ersten Schuljahres angebahnt wurde: Was z.B. 5 ▪ 2 überhaupt bedeuten soll, ist vielen Kindern noch Ende der Grundschule nicht wirklich klar. Das Operationsverständnis für die Multiplikation ist nun einmal eine gewaltige Herausforderung für das kindliche Denken. Nicht nur „rechenschwache“ Kinder bewältigen diese Herausforderung nur dann, wenn sie in sorgfältig geplanten Unterrichtseinheiten ausreichend Zeit und Gelegenheit bekommen haben, *Handlungserfahrungen* zu sammeln, diese zu *versprachlichen* und zu *verinnerlichen*. Ohne sicheres Operationsverständnis ist aber eine dauerhafte Automatisation des kleinen Einmaleins im eigentlichen Sinn kaum möglich (dazu weiter unten mehr).

Voraussetzung 2: Sicherheit im Umgang mit Zehnern und Einern
Das kleine Einmaleins spielt sich weitgehend im zweistelligen Zahlenbereich ab. Wie soll ein Kind, dass noch Schwierigkeiten mit der Unterscheidung und quantitativen Einordnung von z.B. 36 und 63 hat, automatisieren, dass das eine 9 ▪ 4, das andere hingegen 9 ▪ 7 ist?

Voraussetzung 3: Flüssiges Kopfrechnen im zweistelligen Zahlenbereich
Wie noch genauer auszuführen sein wird, besteht eine entscheidende, für manche Kinder meines Erachtens unverzichtbare Hilfestellung bei der Automatisation der Malsätzchen darin, die zahlreichen Querverbindungen zu nutzen, welche zwischen den Aufgaben des kleinen Einmaleins bestehen.

Ein beliebiges Beispiel: 6 ▪ 6 = 36 merken sich die meisten Kinder recht bald. 7 ▪ 6 = 42 könnte auf dieser Grundlage verankert werden – dann, wenn das Kind den Zusammenhang zwischen 6 ▪ 6 und 7 ▪ 6 verstanden hat (7 ▪ 6 ist *um 6 mehr* als 6 ▪ 6) *und* die Addition 36 + 6 ohne größere Anstrengung rechnen kann. Kann es das nicht, dann ist für dieses Kind 6 ▪ 6 eben auch keine Hilfe zum Lösen von 7 ▪ 6. Die Aufgabe 7 ▪ 6 muss dann aber als *Einzelaufgabe* gemerkt werden, was schwerer ist als das Merken in Zusammenhängen (wie jeder Erwachsene weiß, der sich Eselsbrücken sucht, wenn er etwas im Gedächtnis behalten soll). Ein Kind sollte daher das Plusrechnen auch mit Überschreitung (und in anderen Fällen das Minusrechnen auch mit Unterschreitung) im zweistelligen Zahlenraum bereits flüssig beherrschen, ehe man ihm zumutet, sich die Aufgaben des Einmaleins mehr und mehr zu merken.

1.2 Gefahr Nummer zwei: Zu schnell!

Selbst wenn alle Voraussetzungen gegeben sind, bleibt das Merken des gesamten Einmaleins eine gewaltige Lernaufgabe. Alles spricht dafür, den Kindern für diese Aufgabe den größtmöglichen zeitlichen Spielraum zu gewähren. Geschieht dies auch?

Dazu ein Hinweis: Es war früher üblich (und ist es heute noch in anderen Ländern), die „schweren“ Malreihen (zumindest die Siebener-Reihe) erst in der dritten Schulstufe zu erarbeiten. Die dagegen heute in Österreich unserer Beobachtung nach verbreitete Unterrichtspraxis ist es, sämtliche Malaufgaben *und* deren Umkehrungen (die Divisionen ohne Rest im Bereich des kleinen Einmaleins) bereits in der zweiten Schulstufe durchzunehmen in der Erwartung, dass die Kinder das kleine Einmaleins am Ende des zweiten Schuljahres auswendig können. Der Lehrplan schreibt dies keineswegs vor, er differenziert vielmehr: Grundstufe I (in diesem Fall also: zweite Schulstufe) – „Erarbeitung des Einmaleins ... weit gehendes Automatisieren“; 3. Schulstufe – „Einmaleins – Automatisierung“.

1.3 Gefahr Nummer drei: Zu viel auf einmal!

Gleichfalls gängige Unterrichtspraxis ist es, Malaufgaben und deren Umkehrungen als Divisionen *parallel* zu erarbeiten. Das scheint einerseits plausibel: Die Division ist die Umkehroperation zur Multiplikation, das Wissen einer Malaufgabe wie z.B. $5 \cdot 6 = 30$ ist zugleich der Schlüssel zur Lösung der Divisionen $30 : 5 = 6$ wie auch $30 : 6 = 5$.

Daraus folgt allerdings nur eines zwingend: Eine Division kann *rechnerisch* erst dann gelöst werden, wenn die zugehörige Multiplikation bekannt ist. Das spricht aber nicht unbedingt dafür, das Erarbeiten von Multiplikationen und Divisionen *unmittelbar* zu koppeln. Gerade weil das Dividieren von den Kindern als Umkehroperation zum Multiplizieren verstanden werden muss, sollte das Operationsverständnis für das Multiplizieren nicht erst angebahnt, sondern bereits gut gefestigt sein, ehe man dem Kind abverlangt, nach Bedarf zwischen Operation und Umkehroperation hin und her zu wechseln.

Anders gesagt: Der Malbegriff ist eine für viele Kinder äußerst schwer zu nehmende Hürde. Das Operationsverständnis für das Dividieren ist eine weitere solche Hürde: Unsere Erfahrung mit "rechenschwachen" Kindern zeigt, dass Defizite im Verständnis dieser Operation bis hin zur völligen Ahnungslosigkeit noch häufiger sind als jene im Verständnis der Multiplikation. Zwei gewaltige Hürden also; warum verlangt man, dass Kinder sie mit *einem* Anlauf bewältigen?

1.4 Gefahr Nummer vier: Zu wenig vernetzt!

Mathematik-Didaktiker fordern seit Jahren, bei der Automatisation des kleinen Einmaleins die vielfältigen Querverbindungen zwischen den einzelnen Malaufgaben systematisch zu nutzen (vgl. etwa Wittmann & Müller 1994; Gerster 2005; Gerster 2009; Radatz u.a. 1999; Gaidoschik 2003b). Ist dies aber auch verbreitete Unterrichtspraxis?

Mit Blick auf das, was gängige Schulbücher vorgeben oder wenigstens nahelegen, auch auf Grundlage langjähriger Erfahrung als schulexterner Beobachter und unzähliger Gespräche mit LehrerInnen, muss ich das bezweifeln. Die gängige Praxis scheint in Österreich vielmehr nach wie vor vom Gedanken des Reihen-Lernens bestimmt zu sein.

Das bedeutet: Das kleine Einmaleins wird in der Form von zunächst in sich abgeschlossenen *Reihen* erarbeitet und geübt. Lerneinheit sind also jeweils sämtliche Malaufgaben, bei denen dieselbe Anzahl vervielfacht wird. Bei der Zweier-Reihe ist dies die Anzahl 2 (1mal 2 = 2, 2mal 2 = 4, 3mal 2 = 6 ...); bei der Vierer-Reihe die Anzahl 4 (1mal 4 = 4, 2mal 4 = 8 ...); usw.

Innerhalb einer Reihe wird in der Regel wohl so vorgegangen: Zunächst wird die gesamte Reihe durch fortgesetzte Addition derselben Anzahl aufgebaut. Dann sollen die Kinder die Reihe zunächst in dieser Gesamtabfolge lernen, d.h. die Malsätzchen in der Abfolge von „1mal ...“ bis „10mal ...“ solange üben, bis sie diese Abfolge aus dem Gedächtnis aufsagen können.

Zumindest in der häuslichen Übungspraxis wird die Gesamtreihe in dieser Phase „wie ein Gedicht“ gelernt; die Kinder geben dieses Gedicht (sofern sie es sich merken) dann oft genug auch im charakteristischen Leierkastenton wieder. Erst in weiterer Folge werden die Malsätzchen dann auch durcheinander abgefragt – wobei nicht wenige Kinder sich dabei hartnäckig nur dadurch zu helfen wissen, dass sie jeweils die gesamte Reihe bis zum eigentlich gefragten Malsätzchen hinaufgehen; eine Lösungsstrategie, die sie oft genug bis in die Sekundarstufe beibehalten.

Die oben angesprochenen Querverbindungen kommen in dieser Form des Unterrichts in der Regel - wenn überhaupt - erst nachträglich ins Spiel. Dass ich mir etwa 9 ▪ 4 als 10 ▪ 4 minus 4 erarbeiten kann, wird im Unterricht (hoffentlich) auch thematisiert. Aber diese und andere Querverbindungen werden in der Regel *nicht als Prinzip der Automatisation* in einem entsprechend systematischen Aufbau umfassend genutzt. Auf diese Weise droht das kleine Einmaleins aber für viele Kinder tatsächlich zu einer reinen Gedächtnisübung zu verkommen.

„Aber das ist es doch auch!“ könnte an dieser Stelle ein Einwand lauten: „Das kleine Einmaleins muss man sich doch einfach merken!“

Der Einwand geht an der Sache vorbei. Natürlich muss es *Ziel* des Unterrichtes sein, dass ein Kind die Aufgaben des kleinen Einmaleins letztlich aus dem Gedächtnis sicher und rasch abrufen kann. Die Frage ist nur, *auf welchem Weg* dieses Ziel am besten erreicht werden kann.

Tatsächlich ist das weiter unten vorgeschlagene *vernetzte*, *ganzheitliche* Einmaleins-Lernen eine wesentliche Erleichterung für das Merken selbst. Es geht dabei gar nicht nur darum, dass ein Kind, das etwa 9 ▪ 4 noch nicht auswendig weiß, dieses mit Hilfe von 10 ▪ 4 auf ökonomische Weise ausrechnen kann (wiewohl freilich auch das ein Wert für sich ist). Sondern das wiederholte Lernen des Aufgabenbündels 10 ▪ 4 / 9 ▪ 4 *erleichtert und beschleunigt* das Merken von 9 ▪ 4 selbst. Es führt (bei Beachtung einiger zusätzlicher Überlegungen, siehe weiter unten) dazu, dass dem Kind mit vergleichsweise geringerem Übungsaufwand schließlich auch die unmittelbare Assoziation 9 ▪ 4 = 36 (ohne den Umweg über 10 ▪ 4) gelingen wird.

2. Eine Alternative zum Reihen-Lernen: „Gleicher Multiplikator“ als Prinzip der Einmaleins-Erarbeitung

Wie könnte nun die Erarbeitung des Einmaleins unter Vermeidung der oben angeführten Gefahren konkret, in ihren einzelnen Schritten ablaufen? Dazu einige Empfehlungen:

2.1 Absichern des Operationsverständnisses

Das vorbereitende Arbeiten am Operationsverständnis fürs Malnehmen beginnt üblicherweise bereits in der ersten Schulstufe – und das ist (in Abhängigkeit von der Klassenstruktur) in der Regel wohl auch sinnvoll. Bezüglich der Wege hin zu einem solchen Operationsverständnis muss und kann über das in zahlreichen Didaktik-Handbüchern und Lehrbehelfen Enthaltene hinaus nichts wesentlich Neues gesagt werden.

Ich beschränke mich an dieser Stelle daher unter Verweis auf solche Handbücher (etwa Gersters Beitrag in Abele & Kalmbach 1994; Radatz u.a. 1998; Krauthausen & Scherer 2007; Padberg 2005) darauf, jene Punkte herauszustreichen, die meines Erachtens gerade für schwächere Schüler von besonderer Bedeutung sind:

Übersetzung konkreter Handlungen in ein abstraktes Operationsverständnis
Operationsverständnis kann nur beim Operieren, beim Handeln mit Material gewonnen werden. Der Unterricht muss deshalb vielfältige Erfahrungen von Vervielfachungs-Handlungen ermöglichen. Aus diesen Erfahrungen muss vom Kind aber erst das Verständnis für jene mathematische Operation gewonnen werden, welche in äußerster sprachlicher Verkürzung mit dem Wörtchen „mal“ ausgedrückt wird.

Handeln ist also unverzichtbar – aber nicht ausreichend: Das mathematisch Bedeutsame der wiederholten Handlungen muss vom Kind erst noch begriffen werden. Gerade „rechenschwache“ Kinder benötigen dabei gezielte Unterstützung: Es reicht nicht, wenn sie immer wieder das Material zur Hand nehmen dürfen.

Sie müssen vielmehr gezielt darin gefördert – und das heißt immer auch: gefordert – werden, aus dem Handeln heraus das mathematische Denken zu entwickeln.

Die wichtigsten Schritte dorthin:

(1) Konkrete Vervielfachungshandlungen in Erfüllung eines ebenso konkret-ausführlich formulierten sprachlichen Auftrages, etwa: „Geh’ bitte 5mal zum Korb am Fensterbrett. Bring jedes Mal 4 Würfel mit und leg’ sie auf den Tisch!“
(2) Verstehen und Durchführen sprachlich verkürzter Aufträge, etwa „fünf mal vier Würfel holen“.
(3) Das noch abstraktere „fünf mal vier“ in eine Handlung mit beliebigem Material übersetzen.
(4) Umgekehrt eine vorgeführte Handlung als z.B. „fünf mal vier!“ erkennen.
(5) Das *Resultat* einer solchen Handlung als „fünf mal vier“ begreifen, Beispiel: Auf dem Tisch liegen 5 Haufen mit je 4 Würfeln, das Kind erkennt dies als „fünf mal vier“.
(6) 5 ▪ 4 als symbolische Schreibweise von "fünf mal vier" lernen.
(7) Auf dieser Grundlage die mathematische Gleichwertigkeit von 5 ▪ 4 und 4 + 4 + 4 + 4 + 4 verstehen und diese beiden Schreibweisen beliebig ineinander übersetzen können.

Der gezielte Einsatz von Material(handlungen) heißt also gerade auch: sich aktiv darum zu bemühen, die Materialhandlungen überflüssig zu machen. Dabei wird es von Kind zu Kind sehr verschieden sein, wie rasch diese Ablösung vom Material tatsächlich erfolgen kann.

Veranschaulichen als wichtiger Schritt zu einem tragfähigen Operationsverständnis
In Schulbüchern finden sich auf den Seiten, die der Erarbeitung des Einmaleins gewidmet sind, zahlreiche Veranschaulichungen – mehr und weniger gut geeignete (siehe dazu auch weiter unten den Einschub zur Punkte-Feld-Darstellung).

Im Umgang mit solchen Veranschaulichungen und dem Thema Veranschaulichen als solchem scheint mir folgendes wichtig zu sein:

(1) Das bloße *Anschauen von Veranschaulichungen* von Multiplikationen verhilft nicht zu einem Operationsverständnis des Multiplizierens. Jede Veranschaulichung muss interpretiert werden; auf welche Weise sie interpretiert wird, hängt vom Wissen desjenigen ab, der sie anschaut. Wer bereits verstanden hat, was "drei mal vier" bedeutet, wird eine Abbildung von drei Tellern, auf denen je vier Äpfel liegen, unschwer als Veranschaulichung der Operation 3 ▪ 4 deuten können. Wer mit "drei mal vier" keine Handlung verbindet, wird auf derselben Abbildung vermutlich nur "viele Äpfel" sehen.
(2) Veranschaulichungen sollten also erst dann zum Thema gemacht werden, wenn auf Handlungsebene bereits ein erstes grundlegendes Verständnis für das Vervielfachen abgesichert wurde. Ist das der Fall, können Veranschaulichungen dazu beitragen, dieses Verständnis zu vertiefen und zu erweitern. Aber dafür müssen die *Veranschaulichungen als eigener Lernstoff* ernst genommen werden: Es nützt recht wenig, wenn im Schulbuch zu jeder Malaufgabe in der Erarbeitungsphase immer auch ein Bildchen abgedruckt ist, welches diese Malaufgabe veranschaulicht. Der Zusammenhang zwischen Aufgabe und Abbildung wird manchen Kindern (vermutlich jenen, die ohnedies bereits über ein vertieftes Operationsverständnis verfügen) auffallen, anderen nicht. Die Kinder müssten also immer wieder dazu aufgefordert werden und die Gelegenheit dazu erhalten, darüber zu sprechen, was *sie* in solchen Abbildungen sehen. Das ist aber nur dann sinnvoll, wenn die "erwünschte Sichtweise" nicht immer schon in der Bildunterschrift vorgegeben ist, wie dies für viele Schulbuchseiten typisch ist.
(3) Sie sollten im Unterricht also Kinder (nachdem ein erstes Verständnis für das Vervielfachen handelnd erarbeitet wurde) immer wieder auch mit Abbildungen konfrontieren, die als Multiplikationen gedeutet werden können. Diese Deutung sollte aber die Aufgabe der Kinder sein: *Die Kinder* sollen (Ihnen und den anderen Kindern der Klasse) erklären, ob sie da eine Malrechnung erkennen und wenn ja, welche. Um das Verständnis abzusichern, sollten dann aber immer wieder auch Abbildungen untergemischt werden, die *nicht* als Multiplikationen (sondern etwa als Additionen) interpretiert werden können: Gerade auch das Unterscheiden-Müssen hilft, das Typische am Multiplizieren zu erkennen.
(4) Vor allem aber sollte *das Veranschaulichen selbst* (und nicht nur das Deuten von Veranschaulichungen) immer wieder zur Aufgabe der Kinder gemacht werden: Die Kinder sollen also Zeichnungen anfertigen, die eine vorgegebene Mal-Aufgabe darstellen (und daneben aber auch Zeichnungen, die eine Addition oder Subtraktion, später auch eine Division darstellen). Die Kinder sollten dann natürlich auch aufgefordert werden, ihre eigenen Zeichnungen (aber auch die Zeichnungen anderer Kinder) zu versprachlichen. Wenn sie dies können, führt dies zur Formulierung einer "Rechengeschichte". Und auch das ist ein wichtiger Bestandteil in der Erarbeitung und Absicherung von Operationsverständnis: das Erfinden von eigenen Rechengeschichten (Textaufgaben) zu

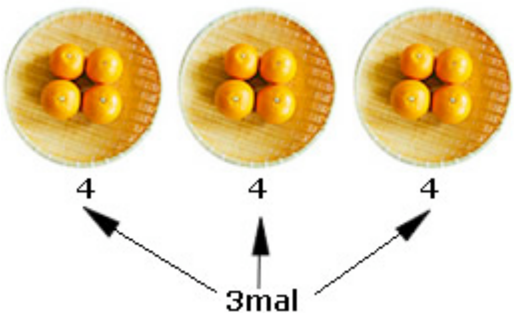
einer vorgegebenen Einmaleins-Aufgabe ebenso wie das Erkennen, dass eine vorgegebene Textaufgabe durch eine Multiplikation gelöst werden kann.

Beim Handeln und Veranschaulichen zunächst von Ergebniszahlen absehen
Das Begreifen der mathematischen Operation wird erschwert, wenn ein Kind die Handlung oder Zeichnung lediglich als Hilfsmittel versteht, um zu einer Ergebniszahl zu kommen. Daher sollten die Materialhandlungen und das Veranschaulichen in der Anfangsphase gar nicht unter diesen Gesichtspunkt gestellt werden: Es geht in dieser Phase der Erarbeitung nicht darum, was bei z.B. „fünf mal vier" oder 5 ▪ 4 "rauskommt". Sondern es geht darum, was die Sprechweise "fünf mal vier" bzw. die Schreibweise 5 ▪ 4 überhaupt bedeuten sollen.

Anfangs auf klare Unterscheidung von Multiplikator und Multiplikand Wert legen
3 ▪ 4 ist genau so viel wie 4 ▪ 3: Wer diese Vertauschbarkeit der Faktoren einer Multiplikation begriffen hat, reduziert den Merkaufwand für das gesamte Einmaleins fast um die Hälfte. Entsprechend wichtig ist es, dies im Unterricht zu vermitteln und auch als Strategie in der Automatisation konsequent zu nutzen (mehr dazu weiter unten).

Alles jedoch zu seiner Zeit: Die Vertauschbarkeit sollte erst dann Thema sein, wenn die Kinder bereits über ein weitgehend gefestigtes Verständnis der Mal-Operation verfügen. Dieses Verständnis aber beinhaltet, dass zwischen 3 ▪ 4 und 4 ▪ 3 sehr wohl ein Unterschied besteht – nicht dem Ergebnis, aber der mathematischen Operation nach.

Die beiden an einer Multiplikation beteiligten Zahlen erfüllen nämlich unterschiedliche Rollen. Am Beispiel 3 ▪ 4: Hier steht 4 für eine *Anzahl*, welche mehrfach genommen wird. 3 dagegen gibt an, *wie oft* diese Anzahl genommen wird. Diese unterschiedlichen Rollen von 3 und 4 werden in der Terminologie *Multiplikator* (für 3) und *Multiplikand* (für 4) zum Ausdruck gebracht.



3 Körbe mit je 4 Orangen: In 3 ▪ 4 spielen die beiden Zahlen 3 und 4 völlig unterschiedliche "Rollen".
Insofern ist 3 ▪ 4 auch nicht einfach „eh dasselbe" wie 4 ▪ 3!

Nun ist es selbstverständlich keinesfalls sinnvoll, Kinder mit diesen Fachausdrücken zu behelligen. Aber es ist wichtig, dass das Kind die Verschiedenartigkeit der beiden in der schriftlichen Fassung 3 ▪ 4 äußerlich gleichen Zahlen versteht. Es sollte mit 3 ▪ 4 selbstverständlich 4 + 4 + 4 assoziieren und bei 4 ▪ 3 ebenso selbstverständlich an 3 + 3 + 3 + 3 denken.

Nur dann können ihm später Querverbindungen unter den Malreihen wirklich weiter helfen: Bei anhaltenden Unsicherheiten bezüglich der Rolle der beiden Zahlen sind Fehler wie 6 ▪ 4 = 26 programmiert (das Kind rechnet 5 ▪ 4 = 20 und gibt für 6 ▪ 4 nicht 4, sondern 6 dazu).

2.2 Klares Nacheinander in der Erarbeitung von Multiplizieren und Dividieren!

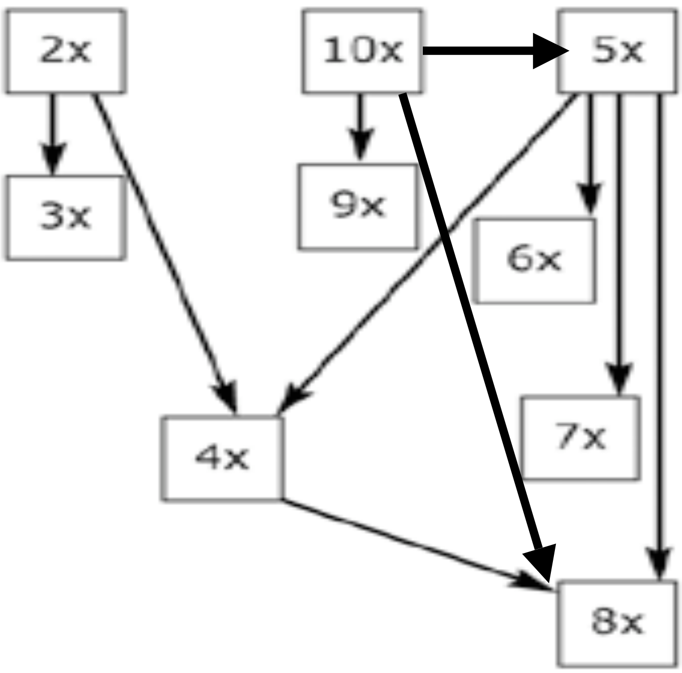
Diese Empfehlung wurde bereits im ersten Teil dieses Beitrags begründet, ebenso wie die nächste:

2.3 Einmaleins erst dann vertiefend erarbeiten, wenn Addieren und Subtrahieren im zweistelligen Zahlenraum abgesichert sind

Dabei ist natürlich die Kopfrechenfertigkeit eines Kindes beim Addieren und Subtrahieren umso wichtiger, je weniger man das Einmaleins als „etwas, das man einfach auswendig lernen muss" unterrichtet. Das ist kein Einwand gegen den hier befürworteten Weg– sondern ein starkes Argument dafür, die mathematisch sinnvolle Reihenfolge der Erarbeitung auch wirklich einzuhalten.

2.4 Erarbeitung von Ableitungsstrategien im Bereich des kleinen Einmaleins

Sämtliche Aufgaben des kleinen Einmaleins (und darüber hinaus; siehe unten) können aus einigen wenigen Kernaufgaben "abgeleitet" (errechnet, gedanklich erschlossen) werden. Die dafür wesentlichen Strategien beruhen allesamt auf den Prinzipien des Verdoppelns sowie der Nachbaraufgaben. Als Kernaufgaben genügen die Aufgaben des Verdoppelns, des Verzehnfachens sowie des Verfünffachens (wobei die Aufgaben des Verfünffachens selbst schon wieder aus den Verzehnfachungen abgeleitet werden können; siehe unten). Die möglichen Ableitungswege aller weiteren Aufgaben seien zunächst im Überblick dargestellt:



Zur Erläuterung:

3mal
lässt sich von 2mal ausgehend über den Gedanken „dieselbe Zahl noch einmal dazu" erarbeiten: 3 ▪ 6 = 2 ▪ 6 + 6, also 12 + 6 = 18, usw.

4mal
kann gleichfalls von 2mal ausgehend über den Gedanken der Verdoppelung erarbeitet werden: 4 ▪ 6 = 2 ▪ 6 + 2 ▪ 6, also 12 + 12 = 24, usw.

Oder aber von 5mal ausgehend über den Gedanken „dieselbe Zahl einmal weg“:

5 ▪ 6 = 30, 4 ▪ 6 ist also 30 – 6 = 24.

Je nach Aufgabe ist einmal der eine Weg leichter, einmal der andere; abhängig auch davon, ob ein Kind im Minusrechnen ebenso gewandt ist wie im Plusrechnen/Verdoppeln.

Für 6mal
bietet sich „5mal und noch einmal dazu“ an: 5 ▪ 8 = 40, daher 6 ▪ 8 = 40 + 8 = 48.

9mal
ist über 10mal minus 1mal unschwer zu errechnen: 9 ▪ 7 = 10 ▪ 7 – 7 = 70 – 7 = 63

Die restlichen Mal-Aufgaben…
Mit den bislang genannten Strategien lassen – unter Berücksichtigung des Prinzips der Tauschaufgabe (9 ▪ 7 = 7 ▪ 9 etc.) sämtliche Aufgaben des kleinen Einmaleins ableiten – mit Ausnahme von drei (eigentlich: zwei) Malaufgaben, nämlich 7 ▪ 8 = 8 ▪ 7 sowie 8 ▪ 8.

Für 7 ▪ 8 (und damit 8 ▪ 7) bietet sich als Ableitungsstrategie an: 5 ▪ 8 + 2 ▪ 8. Rechnerisch ist dies unschwer zu lösen (40 + 16).

Für 8 ▪ 8 kommen folgende Erarbeitungswege in Frage:
(a) 8 ▪ 8 = 5 ▪ 8 + 3 ▪ 8 = 40 + 24
(b) 8 ▪ 8 = 4 ▪ 8 + 4 ▪ 8 = 32 + 32
(c) 8 ▪ 8 = 10 ▪ 8 – 2 ▪ 8 = 80 – 16

Die Erarbeitung von 7 ▪ 8 und vor allem 8 ▪ 8 ist ohne Zweifel rechnerisch aufwändig, egal, welchen Erarbeitungsweg ein Kind wählt. Diese Ausnahme spricht aber nicht gegen das Prinzip, mit Kindern daran zu arbeiten, dass sie Malaufgaben aus einigen wenigen Grundaufgaben abzuleiten lernen. Was das später angestrebte Automatisieren betrifft, spricht aber vieles dafür, sich die schwer abzuleitenden Aufgaben (also 7 ▪ 8 / 8 ▪ 7 und 8 ▪ 8) erst am Schluss vorzunehmen. Wenn es dann tatsächlich nur noch um diese drei Aufgaben geht, sind die Aussichten gut, dass 8 ▪ 8 = 64 und 7 ▪ 8 = 8 ▪ 7 = 56 tatsächlich „einfach so“ im Gedächtnis hängen bleiben...

Wie können nun die oben skizzierten Ableitungsstrategien konkret im Unterricht erarbeitet werden? Das sei im Folgenden am Beispiel der "9mal-Aufgaben" kurz dargestellt. Für die Erarbeitung der weiteren Strategien gelten ganz analoge Empfehlungen.

2.5 Die Erarbeitung von Ableitungsstrategien am Beispiel der "9mal-Aufgaben"

2.5.1 Das Verständnis für den operativen Zusammenhang handelnd erarbeiten

Ein möglicher Weg: Die Kinder werden aufgefordert, z.B. 10 ▪ 4 mit Würfeln zu legen. Als Material eignen sich zum Beispiel vorbereitete Steckwürfeltürme. Bei 10 ▪ 4 sollten die Kinder also wissen, dass sie 10 Türme mit je 4 Würfeln benötigen.

Dann die Frage: "Was musst du tun, damit daraus 9 ▪ 4 wird?"

Die Lösung: „Ich muss einen Viererturm wegnehmen!“

Auf handelnder Ebene wird diese Lösung von vielen Kindern völlig eigenständig gefunden werden; andere Kinder können von den Entdeckungen ihrer Kollegen lernen, wenn diese im Klassenverband besprochen werden ("Strategiekonferenz", vgl. etwa Schipper 2002).

Da es an dieser Stelle darum geht, Verständnis für den Zusammenhang von "zehnmal" und "neunmal" zu erarbeiten, ist es nicht notwendig (und möglicherweise auch gar nicht förderlich), nun sofort mit der Ergebnisermittlung ("Wie viel ist dann 9 ▪ 4?") weiter zu machen. Vielmehr lohnt es, *denselben operativen Zusammenhang* (ohne auszurechnen) auch an anderen Aufgabenpaaren zu erforschen, also etwa: "Lege 10 ▪ 6!" und "Mache daraus 9 ▪ 6!", "Lege 10 ▪ 8!" und "Wie wird daraus 9 ▪ 8?" und so weiter.

Erst in weiterer Folge sollte die Aufmerksamkeit der Kinder freilich auch auf das Ergebnis und dessen rechnerische Ermittlung gelenkt werden. Vorausgesetzt ist dabei allerdings, dass die 10-mal-Aufgaben als Kernaufgaben bereits automatisiert sind (siehe unten) und dass das Subtrahieren von einer Zehnerzahl keine Schwierigkeiten mehr bereitet.

Wenn nun also die Kinder auf Handlungsebene für z.B. 9 ▪ 4 zunächst 10 ▪ 4 gebildet und dann 4 weggenommen haben, sollen sie überlegen, wie man ausrechnen könnte, wie viele Würfel 9 ▪ 4 denn nun sind. Auch hier werden viele Kinder ohne weitere vermittelnden Fragen und Denkanstöße selbst darauf kommen, dass dem Wegnehmen von einem Vierer-Turm die Rechnung „40 – 4“ entspricht. Und wenn Kinder nicht von selbst darauf kommen sollten, dann bieten "Strategiekonferenzen" (s.o.) weitere Lernchancen. Und natürlich können und sollen auch Sie als Lehrkraft versuchen, den Kindern durch Fragen und Denkanstöße *Hilfe beim Selbst-Entdecken* zu bieten.

2.5.2 Das Denken in operativen Zusammenhängen mehr und mehr automatisieren

In einer nächsten Phase kommt es darauf an, dass Kinder den verstandenen Zusammenhang von „9mal“ und "10mal" selbständig und auch ohne Materialhandlung denken lernen; es sollte für sie mehr und mehr selbstverständlich werden, bei "10mal" an "9mal" zu denken und bei "9mal" an "10mal". Eine sinnvolle Einzelübung (unter anderen Übungen) kann in dieser Phase darin bestehen, Kinder direkt nach *dem Erarbeitungsweg* zu fragen, ohne überhaupt ein Ergebnis einzufordern: "Wie komme ich auf 9mal 6?" – "Ich rechne 10mal 6 minus 6, also 60 minus 6!"

In weiteren Übungen sollten die verschiedenen „9mal-Aufgaben“ immer wieder als ein "Übungsblock" behandelt werden, d.h.: Die Kinder ermitteln die Ergebnisse aller 9mal-Aufgaben und benützen dafür den gelernten Zusammenhang mit den 10mal-Aufgaben. Die 9mal-Aufgaben werden dabei bewusst "bunt durcheinander" abgefragt. Die Kinder selbst sollen eine Struktur in die Aufgaben bringen, indem sie jeweils den Zusammenhang zur entsprechenden 10mal-Aufgabe herstellen.

Bereits im Zuge solcher Übungen wird sich bei vielen Kindern (zumindest bei einzelnen 9mal-Aufgaben) quasi „von selbst“ einstellen, dass Ergebnisse spontan einfallen, das heißt: Der „Umweg“ über 10mal gar nicht mehr nötig ist. In solchen Fällen sollte natürlich auch nicht darauf bestanden werden, dass ein Kind diesen Umweg geht: Es hat sich eine 9mal-Aufgabe gemerkt, und das ist gut so. Eine andere 9mal-Aufgabe hat es sich vielleicht noch nicht gemerkt – kein Problem: Es weiß, wie es sich die Lösung errechnen kann.

Wenn ein Kind so weit ist, dass es *selbstständig* jede 9mal-Aufgabe aus der zugehörigen 10mal-Aufgabe ableiten kann, ist es bereit für die unten näher ausgeführte "Zweiteilung" in der weiteren Erarbeitung: Einerseits kann mit ihm daran gearbeitet werden, weitere Ableitungsstrategien zu verstehen und anzuwenden. Andererseits kann daran gearbeitet werden, die "9mal-Aufgaben" mehr und mehr zu automatisieren.

2.6 Automatisieren in Stufen nach dem Prinzip „gleicher Multiplikator“

Um ein mögliches Missverständnis zu vermeiden: Die im Folgenden skizzierten Stufen gelten ausdrücklich nur für die *Erarbeitung der Automatisation* des kleinen Einmaleins, nicht generell für das Arbeiten an der Multiplikation. Das unter 2.1 beschriebene Arbeiten am *Operationsverständnis* sollte natürlich *nicht* "zuerst nur im Bereich der Grundaufgaben" erfolgen, sondern von Anfang an im Bereich des gesamten Einmaleins und selbst darüber hinaus (ein Kind, das verstanden hat, was 3 ▪ 5 heißt, ist auch mit dem Verständnis von 12 ▪ 5 nicht überfordert). Eine Beschränkung auf die Grundaufgaben ("zuerst nur 2mal, 10mal, 5mal"), wie sie im Folgenden *für das Automatisieren* der Malaufgaben empfohlen wird, wäre *für die Erarbeitung eines umfassenden Operationsverständnisses* widersinnig.

Nur dort, wo es um das *fortschreitende Automatisieren* der Einmaleinsaufgaben geht, ist es sinnvoll, sich erst einmal auf die "Grundaufgaben" zu konzentrieren und dann Schritt für Schritt auch weitere, von diesen Grundaufgaben *abgeleitete Aufgaben* mit dieser Zwecksetzung (Speicherung im Langzeitgedächtnis) automatisierend zu üben.

Das Arbeiten am Einmaleins sollte sich aber keinesfalls auf das automatisierende Üben beschränken. *Parallel dazu* sollte weiterhin immer wieder am *Operationsverständnis* (Handeln, Veranschaulichen, Anwenden im Sachrechnen) gearbeitet werden. Und es gibt eine Fülle von mathematisch wertvollen *operativen und produktiven Übungen* zum kleinen Einmaleins (vgl. dazu v.a. Wittmann & Müller 1994), die nicht daran gebunden sind, dass die Malaufgaben bereits automatisiert sind (umgekehrt trägt aber das operative und produktive Üben *auch* dazu bei, das Automatisieren zu befördern). Die Kinder müssen freilich, um solche Aufgaben des operativen und produktiven Übens bewältigen zu können, bereits über die oben skizzierten Strategien verfügen, damit sie noch nicht automatisierte Aufgaben aus den Grundaufgaben ableiten können (siehe 2.4.1); und sie sollten diese Grundaufgaben auch bereits automatisiert haben (siehe das Folgende).

Sind diese Voraussetzungen einmal erarbeitet, ist im weiteren Vorgehen im Unterricht eine Zweiteilung sinnvoll: Einerseits geht es um *operatives und produktives* Üben *im gesamten Bereich des kleinen Einmaleins* (ohne dass dabei "10mal" eine strikt einzuhaltende Grenze darstellt; siehe oben). Dabei geht es freilich nicht um das Automatisieren der Malaufgaben, sondern um das Erkunden von operativen Zusammenhängen, um das Erleben von "Mathematik als Tätigkeit". Dass im Zuge dieses Übens auch die eine oder andere Malaufgabe im Gedächtnis "hängen bleibt", ist durchaus erwünschtes Nebenresultat, aber nicht der eigentliche Inhalt und oberste Zweck dieser Aktivitäten.

Andererseits geht es um das *automatisierende Üben*; sein Zweck ist genau dieses Speichern des kleinen Einmaleins im Langzeitgedächtnis. *Für diesen Zweck und in diesem Bereich* ist es sinnvoll, "Stufen der Erarbeitung" einzuhalten, wobei freilich unterschiedliche Kinder diese Stufen in ganz unterschiedlicher Geschwindigkeit durchlaufen werden. Der Einsatz einer Lernkartei (siehe unten) bietet gute Möglichkeiten, diese unterschiedlichen Lerngeschwindigkeiten auch im Klassenverband zu berücksichtigen.

2.6.1 Automatisation der Grundaufgaben „2mal“, „10mal“ und „5mal“

Als Grundaufgaben oder „Kernaufgaben“ für das Ableiten aller weiteren Malaufgaben bieten sich die Aufgaben mit den Multiplikatoren 2, 10 und 5 an. Wenn es in weiterer Folge um das Automatisieren der Malaufgaben geht, müssen daher zunächst auch diese Grundaufgaben automatisiert werden. Dazu die folgenden Anregungen:

Die „2mal-Aufgaben“ im Zahlenraum 10
gehören zu den Grundaufgaben, deren Absicherung bereits im ersten Schuljahr erfolgen sollte. Zuweilen hat ein Kind diese Aufgaben als 2 + 2, 3 + 3 usw. zwar bereits automatisiert, bringt sie aber nicht von selbst in Zusammenhang mit der Aufgabe 2 ▪ 2, 2 ▪ 3 usw.; in diesem Fall ist an seinem Operationsverständnis zu arbeiten.

Die Verdoppelungen von 6, 7, 8 und 9
können in der Regel rasch unter Einsatz des „inneren Fingerbildes“ dieser Zahlen erarbeitet werden. Voraussetzung ist, dass Kinder bei 6 an „5 + 1“ (gemäß der Fingeranzahl bei der herkömmlichen „Zeigeweise“ von 6), bei 7 an „5 + 2“ usw. zu denken gelernt haben (zur Erarbeitung s. Gaidoschik 2007 und http://www.rechenschwaeche.at/pra/zahlenraum10.htm. Auf dieser Grundlage können sie lernen, bei z.B. 2 ▪ 7 an 2 ▪ 5 und noch 2 ▪ 2 zu denken. Bei gezieltem Training können so sämtliche Verdoppelungen im Zahlenraum 20, mit anderen Worten: sämtliche 2mal-Aufgaben, zumeist in recht kurzer Zeit automatisiert werden.

Die „10mal-Aufgaben“
sind im Grunde eine Frage des Stellenverständnisses. Zehner und Einer und damit den Kern unseres Dezimalsystems zu begreifen, heißt auch: zu begreifen, dass ein Zehner 10mal so viel ist wie ein Einer. Auf dieser Grundlage kann ein Kind auch verstehen, dass 2 Zehner 10mal so viel sind wie 2 Einer, 3 Zehner 10mal so viel wie 3 Einer, usw. Sich zu merken, dass 10 ▪ 2 = 20, 10 ▪ 3 = 30 etc., bereitet ohnedies den wenigsten Schwierigkeiten.

Für die Erarbeitung und anschließende Automatisierung der „5mal-Aufgaben“
bieten sich zwei Wege (oder die Kombination dieser beiden Wege) an:

<u>Weg 1: Erarbeitung über den Zusammenhang „5mal ist die Hälfte von 10mal“</u>
Voraussetzung ist Klarheit über den mathematischen Begriff „Hälfte“. Diese Klarheit sollte im Grunde im Laufe des ersten Schuljahres erreicht worden sein, ebenso die Automatisation der Hälfte-Aufgaben im Zahlenraum 10: Die Hälfte von 10 ist 5, die von 8 ist 4, usw.

Auf dieser Basis ist es rechnerisch einfach, auch die Hälften von 80, 60, 40 und 20 zu gewinnen.

Sind diese Voraussetzungen gegeben (und nur dann!), so kann z.B. 5 ▪ 8 leicht über den Gedanken „das ist halb so viel wie 10mal 8, also die Hälfte von 80, also 40“ gewonnen und auf dieser Grundlage automatisiert werden. Derselbe Weg bietet sich für 5 ▪ 6, 5 ▪ 4 und (falls nötig) auch 5 ▪ 2 an. Schwieriger zu errechnen und als Gedächtnisstütze deshalb für manche Kinder vermutlich weniger geeignet sind die Hälften von 90 (für 5 ▪ 9), 70 (für 5 ▪ 7), 50 (für 5 ▪ 5) und 30 (für 5 ▪ 3). Zumindest für schwächere Rechner drängt sich deswegen zumindest für diese Aufgaben Weg 2 auf, siehe weiter unten.

Beschreitet man Weg 1, so gilt für die „5mal-Aufgaben“ jene Schrittfolge der Erarbeitung, welche unter 2.5 an den 9mal-Aufgaben exemplarisch dargestellt wurde; siehe dort.

Weg 2: Die 5mal-Aufgaben als Tauschaufgaben der 5er-Reihe
Gerade die 5er-Reihe wird aufgrund ihrer Regelmäßigkeit (abwechselnd nur 5 und 0 an der Einerstelle) von den meisten Kindern als Reihe rasch gemerkt. Das könnte dafür sprechen, die Malaufgaben mit 5 (als einzige!) im ersten Schritt als Reihe zu erarbeiten. Um diese Aufgaben später als Kernaufgaben nutzen zu können, müssen sie freilich auch isoliert rasch und sicher gewusst werden.

Man muss also gezielt darauf hinarbeiten, dass ein Kind beispielsweise 9 ▪ 5 nicht dadurch lösen muss, dass es die gesamte Reihe von 1 ▪ 5 beginnend hochgeht. Die möglichen Hilfestellungen dafür sind genau jene Querverbindungen, die unter 2.4 für die Erarbeitung des gesamten Einmaleins dargestellt werden; sie müssten nötigenfalls in der 5er-Reihe sozusagen im Kleinen angewandt werden.

Im zweiten Schritt ist es spätestens jetzt an der Zeit, das Tauschgesetz (Kommutativgesetz) der Multiplikation zu erarbeiten: 6 ▪ 5 = 5 ▪ 6, usw. Erst dadurch werden die automatisierten Aufgaben der 5er-Reihe als Grundaufgaben (von „5mal eine Zahl“ ergibt sich „6mal diese Zahl“, siehe 2.4) nutzbar. Es gilt hier freilich das oben Gesagte: Vor Erarbeitung des Tauschgesetzes sollte das Operationsverständnis fürs Multiplizieren bereits abgesichert sein.

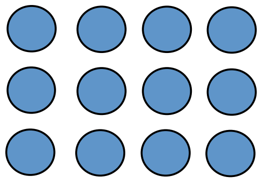
Einschub: Die Erarbeitung der Punkte-Feld-Darstellung als unverzichtbarer zweiter Schritt zu einem tragfähigen Operationsverständnis der Multiplikation

Bei den Hinweisen zur Erarbeitung des Operationsverständnisses (2.1) wurde ein wesentlicher Bestandteil eines umfassenden Operationsverständnisses der Multiplikation vorerst ganz bewusst ausgeklammert. Spätestens an dieser Stelle muss dies Ausklammerung beendet werden:

Kinder sollten Multiplikationen nicht nur dort erkennen, wo dieselbe Anzahl (als *klar abgegrenzte Anzahl*) mehrfach (je nach Multiplikator zweimal, dreimal usw.) genommen wird (Multiplizieren als *Handlung* des Vervielfachens bzw. als das Ergebnis einer solchen Handlung).

Sondern Kinder sollten Multiplikationen auch *räumlich-situativ* verstehen lernen, und zwar auch in solchen räumlichen Anordnungen, in denen nicht eindeutig festgelegt ist, welche Zahl als Anzahl und welche Zahl als Faktor (Multiplikator) zu verstehen ist.

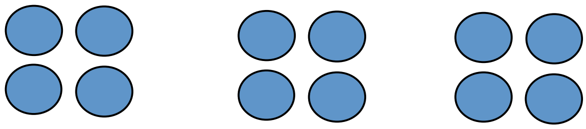
Dasselbe weniger kompliziert: Die folgende Anordnung von Punkten ("Punkte-Feld-Darstellung") kann als Darstellung einer Multiplikation gedeutet werden:



Je nach Sichtweise lassen sich hier entdecken:

- 3 Reihen zu je 4 Punkten (3 ▪ 4)
- 4 Spalten zu je 3 Punkten (4 ▪ 3)
- Eventuell auch zwei Gruppen zu je 6 Punkten (2 ▪ 6) oder sechs Gruppen zu je 2 Punkten (6 ▪ 2)
- Als Extremfall der Multiplikation: Eine Gruppe von 12 Punkten (1 ▪ 12) oder 12 einzelne Punkte, die als 12 ▪ 1 gedeutet werden könnten.

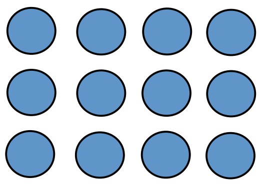
Solche Sichtweisen sind nicht selbstverständlich. Auch Kinder, die gelernt haben, in dieser Abbildung



die Multiplikation 3 ▪ 4 zu entdecken, erkennen in der Punkte-Feld-Darstellung spontan vielleicht nur "Viele Punkte!", aber keine Malaufgabe. Darstellungen müssen eben, wie bereits ausgeführt, immer erst interpretiert werden, und die Interpretation einer Punkte-Feld-Darstellung als Multiplikation muss von vielen Kindern erst gelernt werden. Das wird aber kaum gelingen können, wenn ein Kind sogar noch Probleme mit der Interpretation von drei deutlich getrennten Vierergruppen als 3 ▪ 4 hat. Denn solche Veranschaulichungen (klar getrennte Gruppen gleicher Anzahl) lassen sich vermutlich leichter als Darstellung einer Multiplikation klären. Daher sollten solche Veranschaulichungen und deren Interpretation (und umgekehrt deren Anfertigung durch die Kinder selbst) *zunächst* im Vordergrund stehen.

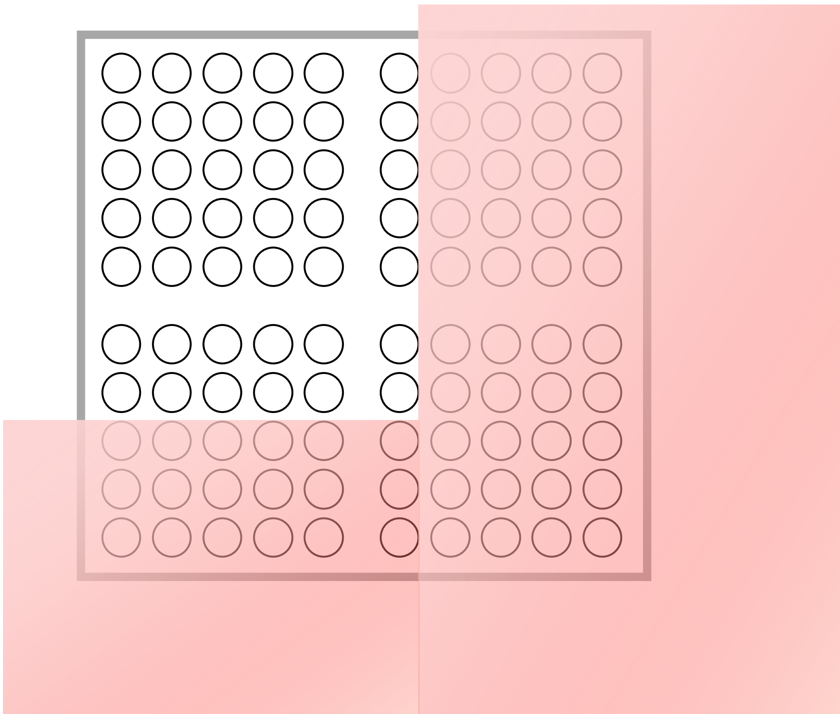
In einem nächsten Schritt ist es aber unverzichtbar, gezielt auch Punkte-Feld-Darstellungen von Multiplikationen zu erarbeiten – wohlgemerkt: zu *erarbeiten*! Sie müssen die Kinder also dazu bringen, das zu versprachlichen, was sie bei Betrachtung einer solchen Punkte-Feld-Darstellung "sehen" oder vielmehr: denken; die Kinder müssen darüber reden, ob sie überhaupt und wenn ja, *welche* Malaufgaben sie in einer solchen Darstellung erkennen können.

Dass solche Darstellungen *nicht eindeutig* sind, wurde bereits ausgeführt. Das Punktemuster



ist eben mit gleicher Berechtigung als Darstellung von 3 ▪ 4 und 4 ▪ 3 zu deuten. Das macht die Interpretation als Malaufgabe für viele Kinder vermutlich schwieriger; und eben deshalb sollten solche Darstellungen eben auch nicht für den Einstieg gewählt werden. Diese Zweideutigkeit bietet aber dann, wenn in einem nächsten Schritt auch solche Darstellungen mit den Kindern erarbeitet werden, den ersten großen Vorteil, dass daran das Tauschgesetz (Kommutativgesetz) der Multiplikation unschwer erarbeitet werden kann. Denn in der Klasse werden vermutlich manche Kinder die obige Darstellung als 3 ▪ 4, andere als 4 ▪ 3 deuten; und im Klassengespräch wird sich leicht klären lassen, dass grundsätzlich beide Sichtweisen richtig sind. Daran lässt sich aber auch klären, dass 3 ▪ 4 und 4 ▪ 3 *gleich viel* ist. In weiterer Folge kann und soll daran gearbeitet werden, dass die Kinder das Tauschgesetz auch als Rechenstrategie nutzen (dazu weiter unten mehr).

Ein zweiter großer Vorteil: Punkte-Felder können in weiterer Folge für das rasche Darstellen von Multiplikationen genutzt werden, ohne dass dabei Zeit und Konzentration auf das mühsame Malen von Punkten aufgewendet werden müsste. Dafür braucht es nicht mehr als ein 100-Punkte-Feld und einen Abdeckwinkel in passender Größe, der es erlaubt, jede Aufgabe des kleinen Einmaleins durch einfaches Anlegen des Winkels darzustellen und durch Verschieben des Winkels in eine andere Aufgabe zu verwandeln:



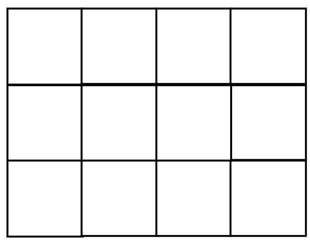
Darstellung der Aufgabe 7 ▪ 6 (oder auch 6 ▪ 7) am 100-Punkte-Feld mit halbtransparentem Abdeckwinkel

Die Fünfer-Gliederung der Punkte am 100-Punkte-Feld erlaubt nicht-zählendes Erkennen der dargestellten Anzahl von Reihen und Spalten (bzw. nicht-zählendes Anlegen des Abdeckwinkels auf eine beliebige Anzahl von Reihen und Spalten). Freilich: Auch die Nutzung dieser Struktur für ein nicht-zählendes Erfassen von Anzahlen ist nicht selbstverständlich. Sie muss daher im Unterricht thematisiert und mit manchen Kindern vielleicht erst geduldig erarbeitet werden!

Wenn der Abdeckwinkel (wie in der Abbildung angedeutet) aus halbtransparenter Folie angefertigt wird, bleiben die abgedeckten Punkte immer noch erkennbar (was es etwa ermöglicht, bei "9mal-Aufgaben" den Zusammenhang mit "10mal-Aufgaben" zu erkennen bzw. im Unterricht zum Thema zu machen).

Das fortgesetzte Arbeiten am Operationsverständnis wie auch das Arbeiten am Verstehen operativer Zusammenhänge wird durch dieses Arbeitsmittel wesentlich erleichtert: Sie können Kindern den Auftrag erteilen, bestimmte Malaufgaben auf ihren 100-Punkte-Feldern mit dem Abdeckwinkel darzustellen. Sie können umgekehrt Kindern ohne großen Aufwand (etwa mit Hilfe eines Overhead-Projektors) solche Darstellungen vorgeben und sie auffordern, die zugehörigen Malaufgaben zu nennen. Und Kinder können die in 2.4 skizzierten operativen Zusammenhänge auch durch Verschieben des Abdeckwinkels entdecken (wobei es vermutlich für viele Kinder leichter sein wird, diese Zusammenhänge zunächst, wie in 2.5.1 dargestellt, durch Handlungen mit Würfeltürmen zu erkunden).

Ein dritter Vorteil der Punkte-Feld-Darstellung: Sie bereitet die Erarbeitung des Flächenbegriffs und des Verständnisses für die Berechnung von Flächeninhalten vor. Denn wer drei Reihen mit je vier Punkten wie selbstverständlich als 3 ▪ 4 zu interpretieren gelernt hat, wird vermutlich ohne weitere Anleitung draufkommen, dass hier 3 ▪ 4 kleine Quadrate (Zentimeterquadrate oder "Quadratzentimeter") zu einem Rechteck zusammengefügt wurden und die Fläche dieses Rechtecks daher 12 Quadratzentimeter beträgt.



2.6.2 Das Automatisieren aller weiteren Aufgaben mit Hilfe der Grundaufgaben

Erst wenn die Grundaufgaben automatisiert sind, sollte Schritt für Schritt das Automatisieren auch der weiteren Aufgaben gezielt gefördert werden. Auch dies sei zunächst an den 9mal-Aufgaben dargestellt. Wieder gelten dieselben Überlegungen dann auch für die Aufgaben mit anderen Multiplikatoren.

Anlegen einer Lernkartei
Zum gezielten automatisierenden Üben hat sich die Verwendung von Lernkärtchen und einer Lernkartei bewährt. Diese Kartei wird nicht sofort mit allen Malaufgaben gefüllt, sondern nach und nach (im Tempo des Kindes!) zu einer vollständigen Einmaleins-Datei ausgebaut. Wie stets bei Verwendung einer Lernkartei, sollten jene Aufgaben-Kärtchen, die bereits spontan gelöst werden können, bei jeder erfolgreichen Wiederholung in der Kartei um ein Fach weiter nach hinten gesteckt werden. Nach etwa fünf erfolgreichen Wiederholungen können die zeitlichen Abstände zwischen (natürlich weiterhin sinnvollen Wiederholungen auch dieser schon gut gespeicherten Aufgaben) getrost erweitert werden. Noch nicht spontan gewusste Kärtchen bleiben aber in ihrem Fach und sollten nahezu täglich wiederholt werden.

Automatisierendes Üben von zusammengehörigen Aufgaben
Entscheidend für das Weitere ist nun, dass auch beim automatisierenden Üben genau die operativen Zusammenhänge genützt werden sollten, die zuvor als Ableitungsstrategie erarbeitet wurden. Zunächst ging es darum, Kindern mit Hilfe dieser Strategien das ökonomische Ausrechnen noch nicht automatisierter Aufgaben zu ermöglichen. Beim automatisierenden Üben soll nun versucht werden, durch wiederholtes Abrufen dieser Strategien feste Gedächtnis-Assoziationen zwischen einer bereits gemerkten Aufgabe (der Grundaufgabe) und einer noch zu merkenden Aufgabe zu knüpfen. Solche Assoziationen

erleichtern und beschleunigen das Speichern der noch zu merkenden Aufgabe im Langzeitgedächtnis: Zusammenhängendes wird leichter gemerkt als isolierte Einzelfakten.

Konkret heißt das: Die Kinder bekommen alle "9mal-Aufgaben" (aber zunächst *nur* diese) auf Aufgabenkärtchen als *ein* Päckchen von zusammenhängenden Aufgaben vorgelegt mit dem Auftrag, diese Aufgaben regelmäßig (siehe dazu weiter unten) zu trainieren. Wenn nun eine Aufgabe noch nicht aus dem Gedächtnis abgerufen werden kann, dann soll sie auf dem erarbeiteten Weg aus der zugehörigen "10mal-Aufgabe" abgeleitet werden. Die Zusammenstellung aller "9mal-Aufgaben" zu einem Päckchen erleichtert dieses Ableiten insofern, als durch die oftmalige Wiederholung desselben Ableitungsweges die Chance erhöht wird, dass sich dieser Ableitungsweg einschleift, dass er also ohne große Denkanstrengung abgerufen werden kann.

Diese Form des Trainings muss mit den Kindern freilich selbst erst erarbeitet werden. Manche Kinder werden solche Übungen bald selbstständig oder in Partnerarbeit durchführen können. Andere werden dabei vielleicht längere Zeit Unterstützung benötigen. Sie brauchen also vielleicht jemanden, der ihnen hin und wieder einen Tipp gibt, wie sie eine Aufgabe ableiten können, die sie noch nicht gespeichert haben ("Denk' an 10mal …!"). Und sie brauchen auch jemanden, der kontrolliert, ob sie mit Hilfe dieser Ableitung auch zum richtigen Ergebnis gekommen sind. Denn beim automatisierenden Üben wäre es (anders als beim produktiven und operativen Üben) kontraproduktiv, wenn falsche Lösungen nicht unmittelbar korrigiert werden; Ziel ist ja, durch wiederholtes Üben zum Auswendigmerken zu gelangen, und etwaige Fehlspeicherungen sind schwer wieder loszuwerden.

Dem kann dadurch vorgebeugt werden, dass auf der Rückseite des Kärtchen der gesamte Einmaleins-Satz (Aufgabe und *richtiges* Ergebnis) notiert wird. Dann wird aber für manche Kinder vielleicht die Versuchung groß sein, das Kärtchen gleich umzudrehen, ohne zuvor über den Ableitungszusammenhang nachgedacht zu haben, womit wieder das Lernen in Zusammenhängen unterbunden würde. Hier wäre dann Unterstützung in der Form gefordert, dass eine andere Person die Kontrollfunktion übernimmt, also dem Kind nur die Aufgabenseite des Kärtchens zeigt. Das Kind muss über die Lösung und dafür eventuell zuerst über die Ableitungsstrategie nachdenken. Die von ihm genannte Lösung wird dann sofort bestätigt oder korrigiert (besser noch: das Kind wird im Falle eines Fehlers ermutigt, noch einmal nachzudenken/nachzurechnen und die richtige Lösung selbst zu ermitteln).

Genau diese Art der Unterstützung kann zuhause durch die Eltern auch unschwer erfolgen. Freilich müssten die Eltern dafür (etwa im Rahmen eines Elternabends) erst in diese Art der Trainingsbetreuung eingeschult werden.

Einbeziehung der Eltern

Aber es ist ohnedies unbedingt erforderlich – am besten wohl schon zu Beginn des zweiten Schuljahres – die Eltern ausführlich darüber zu informieren, auf welche Weise Sie das Einmaleins mit den Kindern erarbeiten werden. Wenn Sie so vorgehen möchten, wie es in diesem Beitrag beschrieben wird, dann haben Sie sehr gute, durch die aktuelle Fachdidaktik abgesicherte Argumente auf Ihrer Seite; Sie müssen diese Argumente aber auch den Eltern vermitteln und versuchen, diese von Ihrem Weg zu überzeugen. Andernfalls besteht die Gefahr, dass Eltern (in bester Absicht) zuhause einen anderen Weg (vermutlich den Weg des Auswendiglernens von Malreihen) versuchen. Und dass *dieser* Weg vielen Kindern das Einmaleins-Lernen unnötig erschwert, war ja der Ausgangspunkt unserer Überlegungen. Wenn sie umgekehrt die Eltern mit ins Boot holen, dann wird dies den Kindern ein erfolgreiches Einmaleins-Lernen ganz wesentlich erleichtern. Und beim automatisierenden

Üben kommen Sie wohl bei manchen Kindern ohne Unterstützung der Eltern nicht aus! Gerade das Arbeiten mit der Lernkartei (auf Basis einer grundlegenden Einschulung am Elternabend) gibt den Eltern aber eine gute Orientierung dafür, welche Übungen jeweils mit ihrem Kind zu einem bestimmten Zeitpunkt sinnvoll und für das Kind hilfreich sind.

Gezieltes Memorieren
In vielen Fällen wird das oben beschriebene Üben mit Lernkärtchen dazu führen, dass auch die zunächst nur durch Ableitung lösbaren Malaufgaben bald auswendig gewusst werden, das heißt: Die Kinder werden z.B. beim Kärtchen 9 ▪ 9 spontan mit "81" antworten und es nicht mehr nötig haben, sich das Ergebnis über 90 – 9 zu errechnen.

Bei manchen Aufgaben wird dieser Effekt aber vielleicht nicht so ohne weiteres eintreten, und bei manchen Kindern wird sich dieses erwünschte Endresultat des automatisierenden Übens vielleicht überhaupt nur dann einstellen, wenn das bisher geschilderte Arbeiten um ein *gezieltes Memorieren* ergänzt werden.

Damit ist das Folgende gemeint: Ein Kind, das eine Malaufgabe beim Arbeiten mit der Lernkartei immer wieder nur vermittels einer Ableitungsstrategie lösen kann, sollte zunächst dazu angeregt werden, die Strategie sprachlich immer mehr zu verkürzen, also etwa von „9 ▪ 4 ... 10 ▪ 4 = 40, 40 – 4 = 36, 9 ▪ 4 ist 36“ über „9 ▪ 4 ... 40 – 4 ... 36“ hin zu „9 ▪ 4 ... 40 ... 36“.

Weiters sollte dieses Kind beim Arbeiten mit den Lernkärtchen eine noch nicht spontan gewusste, aber dann mithilfe von „10mal“ doch richtig ermittelte 9mal-Aufgabe nicht sofort in den Karteikasten zurückordnen. Sondern es sollte diese Aufgabe noch einige Male, am besten laut und konzentriert mitsprechend, diesmal in der *unmittelbaren Koppelung von Aufgabe und Ergebniszahl* wiederholen: „neun mal vier ist sechsunddreißig, neun mal vier ist sechsunddreißig, neun mal vier ist sechsunddreißig“. *Erst dann* sollte das Kärtchen zurückgeordnet werden. Am Ende eines solchen Durchganges sollten nach einer Pause von einigen Minuten diese zuletzt noch nicht spontan gewussten Aufgaben nochmals durchgegangen werden. Dabei ist darauf zu achten, dass nicht zu viele Aufgaben auf einmal memoriert werden, wobei das "zu viel" von Kind zu Kind unterschiedlich ist; hier muss man einfach probieren, was für das jeweilige Kind machbar ist und was nicht.

Gezieltes Training auch der entsprechenden Tauschaufgaben
Wie und unter welchen Voraussetzungen das Tauschprinzip (9 ▪ 4 = 4 ▪ 9 etc.) zu erarbeiten ist, wurde bereits ausgeführt. Wenn nun die 9mal-Aufgaben weitgehend automatisiert wurden, dann sollten in einem nächsten Schritt die Tauschaufgaben zu den 9mal-Aufgaben ganz gezielt auch in dieser "vertauschten" Form mit in das Automatisationstraining einbezogen werden.

Es sollten nun also auch Lernkärtchen dieser Tauschaufgaben angefertigt und beim Üben mit der Lernkartei als eigene Aufgaben mit berücksichtigt werden. Für viele Kinder wird das keinen zusätzlichen Lernaufwand bedeuten: Die Automatisierung der 9mal-Aufgaben hat bei ihnen zugleich auch zur Automatisierung der zugehörigen Tauschaufgaben geführt, das "Umdenken" von Aufgabe zu Tauschaufgabe ist für sie bald selbstverständlich. Andere Kinder werden zumindest bei einzelnen Aufgaben zwar vielleicht die 9mal-Variante automatisiert haben, bei der zugehörigen Tauschaufgabe aber vielleicht länger nachdenken müssen. Vielleicht zeigt sich dabei, dass diesen Kindern der Tauschgedanke noch gar nicht klar genug ist und erst vertiefend erarbeitet werden muss. Vielleicht benötigen sie aber auch nur Training im Anwenden der Strategie "Vertauschen". Die Zusammenstellung der den

9mal-Aufgaben zugeordneten Tauschaufgaben als eigenes Aufgabenpäckchen, welches nach den 9mal-Aufgaben zur Automatisierung ansteht, bietet ihnen die Gelegenheit dazu.

Werden nun nach der Strategie "10mal/9mal" weitere Strategien automatisierend geübt, dann führt die konsequente Berücksichtigung der Tauschaufgaben dazu, dass gar nicht mehr alle einer bestimmten Ableitungsstrategie zuordenbaren Aufgaben auch tatsächlich vermittels dieser Strategie neu automatisiert werden müssen. Wenn beispielsweise 4 ▪ 9 als Tauschaufgabe von 9 ▪ 4 bereits automatisiert wurde, muss es nicht auch noch als Verdoppelung von 2 ▪ 9 oder als Nachbaraufgabe von 5 ▪ 9 automatisiert werden: Gemerkt ist gemerkt. Das ist insbesondere dort von großem Nutzen, wo das Ableiten mit einigem Rechenaufwand verbunden ist, also bei den 7mal- und 8mal-Aufgaben: Alle diese Aufgaben sind wohl leichter durch über die entsprechenden Tauschaufgaben im Langzeitgedächtnis zu befestigen. Lediglich für 7 ▪ 8 / 8 ▪ 7 und 8 ▪ 8 steht dieser Weg über die Tauschaufgabe nicht zur Verfügung. Die didaktische Konsequenz daraus wurde bereits genannt: Für die Automatisierung dieser drei Aufgaben sollte ausreichend Zeit gelassen werden…

Automatisierung neuer Malaufgaben nach dem Prinzip „gleicher Multiplikator“ bei fortlaufender Wiederholung der bereits automatisierten Aufgaben
Erst wenn Aufgaben mit einem bestimmten Multiplikator samt den entsprechenden Tauschaufgaben weitgehend automatisiert sind, sollte daran gegangen werden, die nächste Gruppe von Malaufgaben nach analogen Grundüberlegungen zu automatisieren. Die bereits automatisierten Aufgaben sollten dabei durch regelmäßiges Arbeiten mit den Lernkärtchen laufend abgesichert werden.

Das Arbeiten mit der Lernkartei bietet nun den großen Vorteil, dass beim Automatisieren jedes Kind in seinem Tempo vorgehen kann. Da den Kindern durch die Ableitungsstrategien Wege offen stehen, jede noch nicht automatisierte Aufgabe aus den Grundaufgaben abzuleiten, können auch jene Kinder, die für das Automatisieren länger brauchen, an den produktiven und operativen Übungen zum Einmaleins (siehe oben) teilnehmen und davon auch im Prozess der fortschreitenden Automatisierung profitieren.

Literaturhinweise:

Abele, A. & Kalmbach, H. (Hrsg.) (1994): *Handbuch zur Grundschulmathematik, 1. und 2. Schuljahr*.- Stuttgart: Klett (darin v.a.: Gerster zur Arithmetik)

Gaidoschik, M. (2003a): *Rechenstörungen: Die „didaktogene Komponente“. Kritische Thesen zur „herkömmlichen Unterrichtspraxis“ in drei Kernbereichen der Grundschulmathematik*.- In: Lenart, F. & Holzer, N. & Schaupp, H. (Hrsg.): *Rechenschwäche – Rechenstörung – Dyskalkulie: Erkennung, Prävention, Förderung*.- Graz: Leykam, S. 128 – 153

Gaidoschik M. (2003b): *Rechenschwäche – Dyskalkulie. Eine unterrichtspraktische Einführung für LehrerInnen und Eltern*.- Wien: G&G.

Gerster, H.-D. (2005): *Anschaulich rechnen – im Kopf, halbschriftlich, schriftlich*.- In: Aster, M. von & Lorenz, J. H.: *Rechenstörungen bei Kindern. Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik*.- Göttingen: Vandenhoek & Ruprecht, 2005, S. 202 – 236

Gerster, H.D. (2009): *Schwierigkeiten bei der Entwicklung arithmetischer Konzepte im Zahlenraum bis 100*.- In: Fritz A. & Ricken, G. & Schmidt, S. (Hrsg.): *Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie*.- Weinheim, Basel, Berlin: Beltz, S. 248–268.

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2007): *Einführung in die Mathematikdidaktik*.- Heidelberg – Berlin: Spektrum, 2. Auflage.

Padberg, F. (2005): *Didaktik der Arithmetik*.- Heidelberg: Spektrum.

Radatz, H., Schipper, W., Ebeling, A. & Dröge, R. (1998): *Handbuch für den Mathematikunterricht, 2. Schuljahr*.- Hannover: Schroedel.

Schipper, W. (2002): *„Schulanfänger verfügen über hohe mathematische Kompetenzen." – Eine Auseinandersetzung mit einem Mythos*.- In: Peter-Koop, A. (Hrsg.): *Das besondere Kind im Mathematikunterricht der Grundschule.*- Offenburg: Mildenberger, S. 119 – 140

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (1994): *Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 1*.- Stuttgart – Düsseldorf – Berlin – Leipzig: Klett, zweite, überarbeitete Auflage.