Brüche in der Volksschule – und was VolksschullehrerInnen darüber hinaus über Brüche wissen sollten

Theoretische Grundlagen und didaktische Anregungen für die vierte Schulstufe

Eva Lassnitzer & Michael Gaidoschik
Rechenschwäche Institut Wien-Graz, Mai 2007,
überarbeitet April 2008

1. Vorbemerkung

Die Unterrichtsforschung weiß und problematisiert seit langem, dass ein beträchtlicher Teil der SchülerInnen (bei weitem nicht nur die „rechenschwachen“!) beim Bruchrechnen in der Sekundarstufe ohne jedes Verständnis vorgeht: Sie entwickeln keine Größenvorstellungen von Brüchen, haben nicht die geringste Ahnung, was Brüche mit Dezimalzahlen zu tun haben, sie praktizieren das Rechnen mit Brüchen als Herumfuhrwerken mit unverstandenen Regeln, bringen diese Regeln entsprechend häufig durcheinander etc. (vgl. Padberg, 2002).

Die didaktische Hauptverantwortung dafür trägt wohl der Mathematikunterricht der Sekundarstufe, wo Brüche ab der fünften Schulstufe (1. AHS bzw. HS/KMS) ein wichtiger „Stoffbestandteil“ sind. Aber die Grundlegung passiert gemäß Lehrplan bereits in der vierten Schulstufe der Volksschule. Worauf sollte dabei geachtet werden? Der folgende Beitrag möchte VolksschullehrerInnen dafür (gerade in Hinblick auf die nachfolgenden Schulstufen) einige Anregungen geben.

2. Didaktische Fallen

2.1. Reduktion auf Halbe, Viertel und Achtel in der Volksschule

Brüche sind gemäß österreichischem Lehrplan bereits in der vierten Schulstufe Thema. Dort soll „Einsicht in das Wesen der Bruchzahlen“ vermittelt werden.

Wir fürchten, dass die VerfasserInnen des Lehrplans hier den Unterschied zwischen Bruch und Bruchzahl nicht ausreichend bedacht haben:

- Ein *Bruch* ist die bestimmte Darstellung einer Größe oder eines Verhältnisses (siehe dazu weiter unten) mit Zähler, Bruchstrich und Nenner.
- Eine *Bruchzahl* ist die zu Grunde liegende Größe (das zu Grunde liegende Verhältnis) selbst.

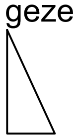
Beispiel:
$\frac{3}{4}$ ist ein bestimmter **Bruch**. Er stellt eine Größe dar, die eben so gut und eben so richtig auch als 0,75 (in Dezimalschreibweise) oder aber auch als $\frac{6}{8}$ oder als $\frac{30}{40}$ oder als … geschrieben werden kann. All das (auch die Dezimalzahl 0,75, welche im Großteil Deutschland als *Dezimalbruch* bezeichnet wird) sind zwar **unterschiedliche Brüche**, aber letztlich nur ***verschiedene Darstellungen*** *(„Repräsentanten“)* **derselben abstrakten Größe** ($\frac{6}{8}$ ist nicht mehr und nicht weniger als 0,75). Diese zu Grunde liegende Größe (die „Äquivalenzklasse“ gleichwertiger Brüche) bezeichnet

man als **Bruchzahl**. Meinen nun die AutorInnen des Lehrplans tatsächlich, dass Kinder bereits in der vierten Schulstufe diesen *Begriff einer Bruchzahl* verstehen sollen?

Tatsächlich meint der Lehrplan wohl, dass ein *erstes Verständnis* für *Brüche* als *besondere Darstellungen* von *Bruchzahlen* erarbeitet werden sollte – wohingegen deren *umfassende* Behandlung der Sekundarstufe vorbehalten bleibt. Und das ist auch dort ein höchst anspruchsvolles Ziel, wie die zahlreichen, in empirischen Untersuchungen (vgl. Padberg 2002) dokumentierten Schwierigkeiten in diesem Bereich selbst in der AHS beweisen!

Wie aber soll die „Einsicht in das Wesen" von Brüchen in der Volksschule erreicht werden? Der Lehrplan sieht für die Erarbeitung der *Brüche* eine Beschränkung auf die grafisch leicht darstellbaren Halben, Viertel und Achtel vor (von wegen „*Wesen* der Bruchzahlen"!). Je nach Auslegung durch Schulbuch und / oder Lehrerin werden Brüche dabei mehr oder weniger ausschließlich als „Tortenstücke“ dargestellt. Nun sind aber Halbe, Viertel und Achtel für viele Kinder an runden (oder auch quadratischen) „Torten“ bald sehr leicht zu zeichnen – ohne, dass sie dabei wirklich ein Halbieren, Vierteln, Achteln *bewusst* erleben müssen; die Unterteilung der Torte erfolgt von vielen Kindern bald rein mechanisch.

Und das rächt sich später: Der Bruch wird für manche Kinder nicht nur als Tortenstück *veranschaulicht*, er *ist* für sie nichts anderes als ein Tortenstück. Manche Kinder denken bei „Viertel“ also nicht an ein *Verhältnis* zu einem (beliebigen) Ganzen, sondern ganz konkret an *ein festes Ding* mit einer *bestimmten Form* (Kreissegment), die diese Kinder sich einzuprägen versuchen. Bei „Drittel“ wird das Merken dieser Form schon schwieriger. Bei „Achtel“ haben die Kinder dann mitunter die Assoziation mit einem „kleinen Stückchen“, das aus der begriffslosen Erinnerung heraus vielleicht so gezeichnet wird:

$\frac{1}{8}$ = 

Jeglicher Zusammenhang mit „1 Ganzes wird in 8 gleiche Teile geteilt“ ist hier verloren gegangen. Und mit dieser Gestalt, diesem Ding wird dann auf dem Papier oder in der Vorstellung herumgefuhrwerkt. Aufgabenstellungen wie „3 Viertel von 1 kg = ? dag“ sind auf dieser Grundlage schon als Frage nicht zu verstehen.

2.2. Überbetonung von Regeln

Für nicht wenige Kinder ist Bruchrechnen in der Sekundarstufe ein Manipulieren mit Zahlen nach undurchschaubaren Handlungsvorschriften: „Da muss ich die Zahl oben mal der Zahl vorne, unten bleibt gleich.“ „Da muss ich oben und unten mit derselben Zahl“, usw. usf.

Bei all dem wird (außer an die Regeln) an nichts gedacht: Es wird nicht auf *irgendeine* Vorstellung (und sei es das Tortenstück) zurückgegriffen, geschweige denn auf so etwas wie den „Begriff“ eines Bruches.

Dass das (entsprechender Pauk-Aufwand vorausgesetzt) bei nicht wenigern Kindern über längere Zeit halbwegs klappt („klappen“ im Sinne der damit erreichten Noten), ist in den Klassenzimmern zu beobachten. Mit Mathematik hat es nichts zu tun, mit „Lernen fürs Leben“ schon deshalb natürlich auch nicht. Und oft genug stürzt das mühsam gezimmerte Regelbauwerk „Bruchrechnen“ spätestens in der siebenten und achten Schulstufe ein, wenn die unbegriffenen Operationen des Kürzens, Malnehmens etc. dann mit Bruch*termen* durchgeführt werden müssen.

Diese Umgangsformen der Kinder sind wenigstens zum Teil Spiegelbild des Unterrichts: Oft genug wird Bruchrechnen ja tatsächlich als ein Regelwerk vermittelt, bei dem es nicht groß was zu verstehen gibt: Multiplizieren heißt „oben mal oben, unten mal unten, das ist eben so“; und „beim Dividieren muss man den Kehrwert nehmen, das ist doch nicht so schwer zu merken“! An *Grundvorstellungen und Grundbegriffen* wird oft genug gar nicht oder zumindest nicht ausreichend gearbeitet, es wird vor allem nicht (im Sinne einer Förderdiagnostik) ausreichend darauf geachtet, ob ein Kind, welches mit Brüchen *rechnen* soll, überhaupt schon (und wenn ja: in welcher Weise) verstanden hat, *was Brüche sind*.

Will man dies ändern, dann sind entsprechende didaktische Anstrengungen im Sekundarschulbereich unumgänglich (LehrerInnenaus- und –fortbildung, Schulbücher …).

Was aber die Volksschule hier leisten kann und soll:

- Sinnvolles Vorarbeiten an *soliden Grundvorstellungen* zu Brüchen – im Wissen darüber, wie schwer solche Grundvorstellungen für viele SchülerInnen zu erarbeiten und dauerhaft anzueignen sind.

Was die Volksschule keinesfalls tun sollte:

- Nicht schon in der vierten Schulstufe den Umgang mit Brüchen auf das Einüben von unverstandenen Regeln reduzieren!

Genau das Letztere passiert aber mitunter, wenn Schulbücher und LehrerInnen – möglicherweise ohne klares Bewusstsein über die darin enthaltenen Schwierigkeiten – Kinder in der vierten Schulstufe mit Aufgaben konfrontieren, die tatsächlich ihrer Komplexität nach auch jederzeit in Schularbeiten der zweiten AHS vorkommen könnten. (Dazu ein Beispiel aus einem Viertklassbuch: Bekannt sind $\frac{3}{8}$ des Jahresverbrauches einer Familie an Heizmittel, dies sind 1 t 80 kg. Die Kinder sollen daraus den Jahresverbrauch berechnen.)

3. Grundlegendes zu Brüchen als Voraussetzung für einen vorausschauenden Unterricht in der Volksschule

Das Folgende erhebt nicht den Anspruch einer umfassenden mathematischen Darstellung (siehe dazu Padberg, 2002). Worum es geht, sind einige grundlegende didaktische Überlegungen (natürlich auf Grundlage des mathematischen Inhalts) mit Blick auf häufige Verständnisschwierigkeiten von Kindern.

Die Schwierigkeit des Bruch-Begriffs besteht – nicht nur für viele Kinder – darin, dass Brüche ein „Doppelwesen“ haben: Einerseits bezeichnen sie (in gewisser Weise) eine feste Größe, andererseits immer auch eine relative Größe (einen Anteil von einer anderen Größe).

Ausgeführt am Beispiel $\frac{3}{4}$:

Bruch als (nur) relative Größe

$\frac{3}{4}$ kann verwendet werden, um von einer vorgegebenen Größe einen bestimmten Anteil zu bezeichnen: $\frac{3}{4}$ von 12, $\frac{3}{4}$ von 2 kg. $\frac{3}{4}$ ist hier nur relativ zu fassen, nur in Bezug zu dieser Größe sinnvoll (wie später jede Prozentangabe; „Prozent“ heißt ja nichts anderes als „Hundertstel von“).

Bruch als (gleichsam) „absolute Größe“

Mit $\frac{3}{4}$ kann aber auch einfach ein bestimmtes „Wie viel?“ gemeint sein (so wie auch natürliche Zahlen ein bestimmtes „Wie viel“ angeben). Das ist immer dann der Fall, wenn mit $\frac{3}{4}$ ohne weiteren Zusatz umgegangen wird. $\frac{3}{4}$ ist hier (wie 5 oder 8 oder 250) gleichsam „absolut“ genommen. Freilich ist auch hier der Bezug zu einem Ganzen unterstellt, welches in vier Viertel unterteilt wird. Dieses Ganze wird aber nicht weiter zum Thema gemacht – es ist beliebig, spielt im Umgang mit den Bruchteilen keine Rolle.

Bei Verwendungen wie $\frac{3}{4}$ m, $\frac{3}{4}$ kg hängt es von der Fragestellung ab, ob hier „absolut“ oder „relativ“ zu denken ist: Will ich wissen, wie viele cm $\frac{3}{4}$ m sind, dann muss ich $\frac{3}{4}$ von 100 cm berechnen, also $\frac{3}{4}$ relativ behandeln; will ich dagegen nur $\frac{3}{4}$ m + $\frac{3}{4}$ m rechnen, spielt das Verhältnis zu 1 m = 100 cm (in der Bearbeitung der Aufgabe) erst einmal keine Rolle, Meter sind hier eine „bloße Endung“, die ohne Schaden für die Aufgabenbearbeitung „ausgeblendet“ werden kann.

Noch einmal: Auch in der „absoluten“ Verwendung handelt es sich um ein *Verhältnis* von Teilen zu einem Ganzen. Das wird deutlich in der

Grundvorstellung A: $\frac{3}{4}$ = 3 mal $\frac{1}{4}$,

das heißt: **1 Ganzes** wird in **4 gleiche Teile** geteilt, der Bruch bezeichnet nun **3 der solcherart hergestellten Teile**.

Dieselbe Größe kann ich aber auch über eine andere Grundvorstellung erreichen:

Grundvorstellung B: $\frac{3}{4}$ = 3 : 4

$\frac{3}{4}$ wird hier verstanden als das Ergebnis der Teilung von **3 Ganzen** in **4 gleiche Teile**; der Bruchstrich entspricht hier also dem Divisionszeichen, wobei der **Bruch** als Wert das **Ergebnis dieser Teilung** von Zähler durch Nenner bezeichnet.

Kinder müssen Brüche letztlich sowohl als Größen als auch als Verhältnisangaben verstehen. Der Einstieg fällt erfahrungsgemäß aber leichter, wenn zunächst das Verständnis als Größen, hier wieder in der Grundvorstellung A erarbeitet wird.

4. Zum Stellenwert der Anschauung

Nicht nur für das Verständnis von Brüchen, aber gerade auch hier gilt: Nicht das Anschauen ist das Wesentliche, sondern das Kapieren. Das Immer-wieder-Anschauen von Tortenstückchen sorgt keineswegs automatisch dafür, dass ein Kind die Besonderheiten der Brüche und ihrer gar nicht selbstverständlichen Schreibweise versteht!

Worum es tatsächlich geht: Kindern soll durch Material und Anschauung erleichtert werden, bestimmte *Gedanken* zu fassen. Das Medium für Gedanken ist aber vorrangig nicht die Anschauung, nicht das Bild, sondern die *Sprache*.

Es geht also darum, die Kinder mit Hilfe des Materials dazu zu bringen, ihre Gedanken über Brüche in Worte zu fassen, dabei mögliche Widersprüche / Lücken in den subjektiven Denkweisen deutlich zu machen, das Wissen auf diese Art zu systematisieren …

Ein Beispiel: Die Kinder sollen Viertel herstellen, durchaus auch an einer „Torte“. Aber das Wesentliche ist nicht die besondere Form eines rechtwinkligen Kreissegmentes, sondern die Tatsache, dass das Ganze (egal, ob Torte oder sonst etwas) in vier Teile geteilt wurde und *ein* einzelner der solcherart entstandenen Teile als *Viertel* bezeichnet wird.

Diese Teilung kann also mit jedem beliebigen Ganzen gemacht werden - nicht bloß mit Kreis/Torte, sondern ebenso gut mit einem Meterstab, einer Tafel Schokolade, einem Stück Papier, einer Einer-Strecke auf dem Zahlenstrahl, einer beliebigen Zahl, oder ganz abstrakt: mit jeder Eins.

Also muss einerseits in dieser Phase der Erarbeitung der Gedanke dadurch gesichert werden, dass seine Anwendung an beliebigen Materialien / bildhaften Darstellungen erprobt wird.

Und damit das gelingt, muss der Gedanke klar sein. Wenn er klar ist, kann und soll er aber auch vom Kind selbst klar formuliert werden können (in seinen eigenen Worten).

5. Erarbeitung der Grundvorstellung A

Das Gemeinsame eines Bruches als Ausdruck einer absoluten Größe einerseits, einer natürlichen Zahl andererseits: Es handelt sich um die Angabe eines bestimmten „Wie viel?“.

Das Neuartige an Brüchen gegenüber den im Unterricht bisher behandelten natürlichen Zahlen: Dieses „Wie viel?“ ist nicht einfach eins oder ein Vielfaches von eins (welches in Zehner-, Hunderter- und größeren Bündeln aufgeschrieben werden kann), sondern es ist weniger als eins, nur noch „Teil einer Eins“.
Die Eins, der Einer, bisher die kleinste bedachte Größe, wird zerkleinert, wird also in gleich große Portionen aufgeteilt. Und um diese (gegenüber den bisherigen Zahlen) neuartigen Zahlen aufzuschreiben, brauche ich auch eine neuartige Schreibweise.

Die funktioniert so: Als Zeichen dafür, dass es um gleich große Teile von Ganzen geht, macht man einen Bruchstrich (der teilt eben auch wirklich: auf dem Papier in oben und unten). Unter den Bruchstrich schreibt man, in wie viele gleich große Teile das Ganze überhaupt geteilt wurde. Über dem Bruchstrich schreibt man, wie viele von den dadurch entstandenen Teilen das bestimmte „Wie viel?“ ausmachen.

$\frac{3}{4}$ bedeutet also, dass ich den Einer, das Ganze, zunächst in 4 gleich große Teile. Von den dadurch entstandenen Viertel-Teilen sind dann 3 Teile gemeint.

Um bei einem Bruch zu wissen, um welche Art von Teil(stück)en es sich handelt, um größere oder kleinere, muss ich unter den Bruchstrich schauen: Dort steht ja, wie viele Teile insgesamt gemacht wurden. Die Zahl unter dem Bruchstrich nennt mir also die Art von Teilen/Stücken, um die es geht: Wenn insgesamt 4 Stücke gemacht wurden, nennt man diese Viertel. Wenn insgesamt 6 Stücke gemacht wurden, nennt man diese Stücke Sechstel. Die Zahl unter dem Bruchstrich heißt deshalb selbst „Nenner“.

Die Zahl über dem Bruchstrich zählt nun ab, wie viele von diesen bestimmten Stücken gemeint sind: der „Zähler“.

Um zu wissen, wie viel der Bruch insgesamt bezeichnet, brauche ich beides, Zähler und Nenner: Der Nenner alleine sagt mir ja nur, ob es größere oder kleinere Stücke sind. Aber wenige große Stücke können insgesamt weniger ausmachen als viele kleine. Erst das Zusammendenken von „Was für Stücke?“ (Nenner) und „Wie viele solche Stücke?“ (Zähler) macht das „Wie viel?“ des Bruches klar.

So weit die mathematische Sache. Für die Erarbeitung wäre es wesentlich, sich zunächst ein Bild davon zu machen, was die Kinder einer Klasse schon alles an Vorwissen mitbringen. Auch bei Brüchen wird das bei vielen Kindern sehr viel sein: Ausdrücke wie „ein Viertel von einem Apfel“, „die Hälfte von einer Semmel“, „Zehntel- und Hundertstelsekunden“ und ähnliches haben die Kinder in der Regel schon gehört, manche werden auch schon Erfahrungen mit der Bruchschreibweise haben. Der Unterricht sollte bei diesen Vorkenntnissen anknüpfen; LehrerInnen müssen sich dazu aber erst bemühen, diese Vorkenntnisse in Erfahrung zu bringen!

6. Materialhandlungen und bildhafte Darstellung für Grundvorstellung A

Bildhaftes Darstellen sollte (nicht als Dogma, aber üblicher Weise) erst der zweite Schritt sein; zuvor schon (und auch später immer wieder zwecks Festigung) geht es um die tatsächliche Teilung von dafür geeigneten Materialien (Apfel in Viertel zerschneiden, Blatt durch Falten in gleich Teile teilen und dann entsprechend den Faltlinien auch zerschneiden, usw.)

Beim **bildhaften Darstellen** geht es vor allem um die **Aktivität des Kindes**: Das Kind soll **Zeichnungen selbst anfertigen, nicht angefertigte Zeichnungen** anschauen.
Das Anfertigen von Bruchdarstellungen sollte unseres Erachtens auch in der Volksschule **bewusst nicht auf zeichnerisch leichte Tortendarstellungen** beschränkt bleiben (zur Begründung siehe das Folgende, aber auch das oben unter 2.1. Erläuterte).

Das Zeichnen von Drittel, Fünftel, Sechstel etc. ist **natürlich schwer, aber das ist gut so**: Die Schwierigkeit fordert zum Nachdenken heraus: Was will ich eigentliche erreichen? Das Zeichnen von z.B. Dritteln gelingt nur, wenn dem Kind das Ziel klar ist (ich möchte drei gleich große Teile von z.B. einer Torte erhalten). Die Umsetzung wird dann oft nur durch Herumprobieren gelingen, und dafür soll auch Zeit sein: Die Hervorbringungen sollen diskutiert werden (was passt, was könnte man noch besser machen), in zweiten und dritten Versuchen von den Kindern selbst verbessert werden, dann erst (wenn noch nötig) gezielt am „Gewusst wie“ gearbeitet werden.

Ein Tipp: Bereiten Sie Kopiervorlagen mit genügend vielen vorgezeichneten „Ganzen“ vor (Kreise mit erkennbarem Mittelpunkt, Quadrate, Rechtecke …). Daran können die Kinder ihre Versuche zur Drittelung/Fünftelung usw. ohne mühsame Vorarbeiten (Zeichnen eines Kreises mit freier Hand!) anbringen.

Unbedingt sollten Sie als LehrerIn nicht nur Tortenstücke zeichnen lassen, sondern v.a. auch Strecken, Rechtecke als „Ganze“ hernehmen! Zeichnerischer Vorteil: Wenn ich an einer Strecke z.B. Siebtel darstellen will, gehe ich vorteilhaft nicht vom Ganzen, sondern vom Siebentel aus. Ich suche mir also selbst aus, wie lange ein Siebentel sein soll. Das Ganze muss sieben Siebentel sein, ich muss also diese Siebentelstrecke noch sechsmal dazu zeichnen.

7. Bei hartnäckigen Problemen im Verständnis der Grundlagen
empfiehlt sich zunächst die Beschränkung auf die Klärung: Was ist mit „Halbe“, „Viertel“, „“Fünftel“, Achtel“ usw. gemeint - *unter Absehung von Zähler-Bruchstrich-Nenner-Schreibweise*.

Also zunächst einmal „Viertel“ oder „Fünftel“ (als Wort geschrieben!) klären: Ein ganzes Ding wird in vier oder fünf gleiche Teile geteilt, diese Teile nennt man dann Viertel bzw. Fünftel von dem Ganzen.

Wir beschränken uns in der Erarbeitung also auf *„Stammbrüche“* (**ein** Viertel, **ein** Sechstel …).

Erst nach Festigung des Begriffs für –tel (mit allem, was oben unter 6. zu Material und Anschauung gesagt wurde) geht man dazu über, auch über zwei, drei … von diesen Viertelstücken / Fünftelstücken zu sprechen und eine dafür geeignete Sprech- und Schreibweise zu finden.

Die Wort-Schreibweise sollte so lange beibehalten werden, bis dem Kind selbstverständlich geworden ist, was überhaupt gemeint ist. Der Vorteil: Diese Schreibweise unterscheidet deutlich zwischen dem „Was?“ (Viertel, Achtel) und dem „Wie viel?“. Das kann helfen, wenn bei einem Kind bei der Schreibweise $\frac{3}{4}$ ständig die für den Nenner nicht weiterhelfende Gleichsetzung mit den natürlichen Zahlen 3 und 4 dazwischenfunkt. Eventuell kann man zusätzlich anfangs strikt die Redeweise „-stücke“ verwenden: „1 Viertelstück“, „3 Achtelstücke“ usw.

8. Erarbeitung der Grundvorstellung B
Mögliche Fragestellung: Vier Kinder bestellen beim Pizza-Service gemeinsam 3 Pizze – wie viel bekommt jedes von ihnen?

Die Frage lässt sich anschaulich lösen: Wie kann man 3 Kreisscheiben auf vier gleiche Portionen teilen?

Unterschiedliche Möglichkeiten; wenn die Pizze nacheinander bestellt und geliefert werden, dann wäre es nahe liegend, jede Pizza erst einmal in Viertel zu teilen. Jeder einzelne hat dann am Ende 3 solche Viertelstücke verdrückt.

Wenn die Pizze gleichzeitig geliefert werden, läßt sich das genauso machen, es sind aber auch andere Teilungen möglich (zwei Pizzen halbieren, jedes Kind bekommt eine Hälfte; die restliche Pizza vierteln, jedes Kind bekommt noch ein Viertel dazu, macht insgesamt eine halbe und eine Viertel Pizza, was drei Vierteln entspricht)

In jedem Fall hat am Ende jeder 3 Viertelstücke bekommen. Das heißt:

3 Viertel ergibt sich nicht nur dadurch, dass man 1 Ganzes in 4 gleiche Teile teilt und davon 3 nimmt (Grundvorstellung A).

Sondern auch, wenn man 3 Ganze auf 4 gleiche Portionen aufteilt (Grundvorstellung B).

Allgemein: Ein Bruch läßt sich auch verstehen als Ergebnis der Division von Zähler durch Nenner. Der Bruchstrich ist insofern gleichbedeutend mit dem Divisionszeichen. Mit dem Unterschied freilich, dass mit 3 : 4 die (noch ungelöste) *Rechnung* angeschrieben wird, mit $\frac{3}{4}$ dagegen gleichzeitig auch das *Ergebnis* dieser Rechnung.

Um dieses Ergebnis als Größe vorstellen und denken zu können, bin ich dann freilich wieder auf Grundvorstellung A angewiesen: Ich muss das Zusammenspiel von Zähler und Nenner richtig verstehen, dann weiß ich, wieviel $\frac{3}{4}$ bedeutet.

9. Weitere mögliche (Betonung: *mögliche*!) Schritte im Überblick

„Der Anfänger sollte es sich zur Gewohnheit machen, bei jeder Schwierigkeit im Bruchrechnen zum Ursprung des Bruchbegriffs zurückzukehren. Er sollte alle formalen Regeln beiseite lassen, bis er sich an Beispielen gründlich klar gemacht hat, wie mit Brüchen zu rechnen ist.“

Auguste de Morgan, Study and Difficulties of Mathematics, 1831
nach: Müller, G.N. / Steinbring, H. / Wittmann, E.Ch. (Hg.) (2004):
Arithmetik als Prozess. Seelze: Kallmeyer, S. 91

9.1. Größenvergleiche von Brüchen ohne Erweitern

Typ A: Gleicher Nenner, z.B.: $\frac{3}{8}$ < oder > $\frac{5}{8}$?

Typ B: Gleicher Zähler, z.B.: $\frac{3}{8}$ < oder > $\frac{3}{4}$?

Wichtig: Sie sollten im Unterricht darauf hinarbeiten, dass solche Größenvergleiche durch den Begriff / in der Vorstellung gelöst werden können. Die Anschauung, die Kinder in der Erarbeitung natürlich verwenden müssen (etwa in der Form von Zeichnungen, die sie *selbst anfertigen*, s.o.!) sollte immer dem Zweck dienen, diesen Begriff zu erarbeiten.

Der „Begriff“ besteht in diesem Fall im Wissen: Je größer der Nenner, umso kleiner ist das einzelne Stück; Achtelstücke müssen also kleiner sein als Viertelstücke.

Schon schwieriger, für manche Kinder in diesem Alter vielleicht noch nicht abstrakt zu fassen: Für die Gesamtbeurteilung zweier Brüche muss ich sowohl Nenner als auch Zähler beachten; sieben (kleinere) Achtelstücke einer Torte sind „mehr Torte“ als drei (größere) Viertelstücke!

9.2. Scheinbrüche, unechte Brüche und gemischte Zahlen

„Scheinbrüche“ sind Brüche, die *ihrer Größe nach* ganzen Zahlen entsprechen (die Darstellung als Bruch ist also gewissermaßen „Schein“):

$$\frac{8}{4} = 2$$

„Unechte Brüche" sind Brüche, die größer als 1 sind, z.B. $\frac{5}{4}$ oder $\frac{9}{8}$. („Echt" ist ein Bruch, wenn er kleiner als 1 ist; nur für Größen kleiner als 1 benötige ich ja eine eigene Schreibweise als Bruch.)

Weil unechte Brüche größer als 1 sind, können sie immer auch als „gemischte Zahlen" dargestellt werden und umgekehrt; es wird also gewissermaßen ihr „echter" Bestandteil „herausgeschält":

$$\frac{5}{4} = 1\ \frac{1}{4}$$

Die Beschäftigung mit „Scheinbrüchen", „unechten Brüchen" und „gemischten Zahlen" kann zur Vertiefung des Bruchverständnisses beitragen – aber nur dann, wenn die Umwandlung von Scheinbrüchen in natürliche Zahlen bzw. von unechten Brüchen in gemischte Zahlen und umgekehrt aus dem Verständnis für die Sache heraus gelöst wird werden! Hier sollten keinesfalls „Rechenregeln" ausgegeben werden, keine unverstandenen „Algorithmen" eingeübt werden („Da muss ich oben dividiert durch unten, das Ergebnis ist vorne und der Rest ist oben" oder so ähnlich). Kinder, die verstanden haben, was ein Bruch ist, können und sollen selbst Wege finden, um aus unechten Brüchen gemischte Zahlen zu machen; und sie sollen immer auch erklären können, was sie da machen und warum!

9.3. Erweitern

Beispiel: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$

Wenn Erweitern überhaupt schon in der Volksschule behandelt werden soll, dann sicher nicht als Rechenregel („oben und unten mit der gleichen Zahl malnehmen"). Vielmehr geht es um die dem Erweitern zu Grunde liegende Vorstellung des „feiner Zerteilens": Die Brucheinteilung wird verfeinert, „die Torte in noch kleinere Stücke zerteilt".

Was vor dem Erweitern weniger, aber größere Stücke waren, sind nach dem Erweitern mehr, aber kleinere Stücke. Dagegen ist die Gesamtheit, das „Wie viel?" gleich geblieben: 3 Viertel sind genauso viel wie 6 Achtel! Dies kann an echten Torten oder Pizzen von Kindern selbst entdeckt werden, den dort erarbeiteten Gedanken können und sollen sie an (selbst angefertigten!) Zeichnungen festigen.

9.4. Rechnen mit Brüchen

wird im Lehrplan für die vierte Schulstufe „nur im Zusammenhang mit einfachen Sachsituationen" gefordert. Tatsächlich finden sich in Schulbüchern (und dann auch in Schularbeiten) der vierten Schulstufe bereits recht anspruchsvolle, gänzlich *ohne Zusammenhang zu einfachen Sachsituationen* und *rein symbolisch notierte* „Rechenaufgaben", die durch den Lehrplan unseres Erachtens keinesfalls gedeckt sind.

Auf diese Art wird Überforderung vieler Kinder provoziert, was (mit tatkräftiger Unterstützung leidgeplagter, zur „Nachhilfe" verdammter Eltern) dazu führt, dass schon VolksschülerInnen (zumindest zwecks Bewältigung einer Schularbeit) unverstandene Regeln für das Rechnen mit Brüchen aufsaugen. Die negativen Folgen müssen die Kinder bis ans Ende ihrer Sekundarschulzeit ausbaden. Daher an dieser Stelle ein dringender Appell: Überlegen Sie genau, was Sie Ihren SchülerInnen der vierten Schulstufe in diesem Bereich abverlangen wollen und warum! (Ein Blick in Lehrplan und Schulbücher der Sekundarstufe ist hier dringend anzuraten.)

9.5. Bruchteile von etwas (Brüche als relative Größen, siehe oben)

Im Grunde handelt es sich hier um einen Spezialfall von Schlussrechnungen. Sinnvollerweise sollte das Schlussrechnen daher zuvor schon erarbeitet worden sein.

9.5.1. „Ein Viertel von ...“ , „ein Achtel von ...“, etc.

„Ein Viertel“ heißt immer, dass ein Ganzes in vier gleiche Teile geteilt wird, ein solcher Teil ist gemeint. In der Grundvorstellung A ist dieses Ganze aber immer als „eins“ gedacht (eine Torte, ein Rechteck). Diese Vorstellung gilt es nun zu erweitern: Ich kann von jeder beliebigen Größe Teile machen, also auch von beliebigen Anzahlen, und dies mit Hilfe eines Bruches zum Ausdruck bringen:

„Ein Viertel von 100“ heißt also nichts anderes als: 100 wird durch 4 geteilt, ein solcher „vierter Teil“ ist gefragt - also 25.

9.5.2. „3 Viertel von ...“, „5 Achtel von ...“ etc.

Wenn 1 Viertel von 100 = 25 klar ist, dann müssen 3 Viertel von 100 genau 3mal so viel sein, also 25.

Das lässt sich zwecks Übersichtlichkeit auch wie eine Schlussrechnung anschreiben:

1 Viertel 25
3 Viertel 75

Was hier vielen Kindern - auch solchen, die das Schluss-Rechnungs-Prinzip verstanden haben - Probleme bereitet, ist die Bruchschreibweise: In „$\frac{3}{4}$ von 100“ wird ihnen nicht deutlich, dass sie „3 von etwas“ ausrechnen sollen und daher zuerst 1 von diesem „etwas“, das „$\frac{1}{4}$ von 100“, bereits vorher ermittelt haben müssen.

Hier kann es also tatsächlich zur Klärung beitragen, wenn man in der Erarbeitung die Bruchschreibweise erst einmal draußen lässt. Das Kind soll also - auch so geschrieben - tatsächlich „3 Viertel von 100“ ermitteln.

Weiterführende Literatur, auch für VolksschullehrerInnen sehr empfehlenswert:
Padberg, F. (2002): Didaktik der Bruchrechung. Gemeine Brüche - Dezimalbrüche. Heidelberg: Spektrum