

Margret Schmassmann

KINDER BRAUCHEN ZAHLEN

Mathematisches Denken pflegen und entwickeln

Einleitung

Mathematische Aktivitäten im Kindergarten gab es schon immer – aber sie waren häufig in Spiele und Aktivitäten zur kognitiven Entwicklung, zur räumlichen Orientierung oder zum Aufbau von Alltagskompetenz verpackt. Das Wort „Mathematik“ war lange tabu im Zusammenhang mit der Vorschulerziehung.

Vielleicht aus Angst vor Vorwürfen aus der Öffentlichkeit, Mathematik sei nicht kindgerecht und würde den Kindern die Kindheit nehmen? Oder aus Angst vor Vorwürfen von Seiten der Volksschule, der Schulstoff würde vorweggenommen, so dass für die Lehrerinnen und Lehrer nichts mehr zum Unterrichten übrig bleibt? Oder aus Angst vor den „mathematischen Gefühlen“ der Bevölkerung? Viele Erwachsene haben ihren eigenen Mathematikunterricht häufig in negativer Erinnerung und wollen daher die Kinder einem solchen Mathematikunterricht nicht zu früh ausliefern.

In der Schweiz ist heute die Diskussion über ein Mathematik-Curriculum für Kinder ab vier Jahren ein ganz selbstverständlicher Teil der Bildungsdiskussion, sowohl in Fachkreisen wie auch in der Öffentlichkeit. Mathematik für Kinder ab vier Jahren wird zur Selbstverständlichkeit.

Liegt dies an einem veränderten Bild von Mathematik in der Gesellschaft, an Veränderungen im Mathematikunterricht, an der Etablierung der Basis- bzw. Grundstufe¹ – oder bloß am Schock, ausgelöst durch Ergebnisse internationaler Studien wie TIMSS und PISA? In diesem Fall wäre Vorsicht geboten. Die breit angelegte Einführung von Mathematikunterricht für Kinder von vier bis acht muss deshalb begleitet

¹ In der Schweiz sind 2 Jahre Kindergarten üblich (von 5-7), danach erfolgt der Übertritt in die Primarschule. Zur Zeit werden neue Modelle diskutiert und erprobt: Je nach Kanton spricht man von „Grundstufe“ (Kinder von 4 bis 7, d.h. zwei Jahre Kindergarten, 1. Klasse „Primarschule“ entsprechend der österreichischen „Volksschule“) bzw. „Basisstufe“ (Kinder von 4 bis 8, d.h. zwei Jahre Kindergarten, 1. und 2. Klasse Primarschule). Die gemeinsame Grundidee: Kindergarten- und Primarschulkinder werden gemeinsam unterrichtet, in der Regel in altersdurchmischten Gruppen. Die Kinder können minimal 2 bis maximal 4 Jahre in der Grundstufe bleiben (minimal 3 bis maximal 5 in der Basisstufe), so dass ein flexibler individueller Übertritt in die Primarschule möglich ist.

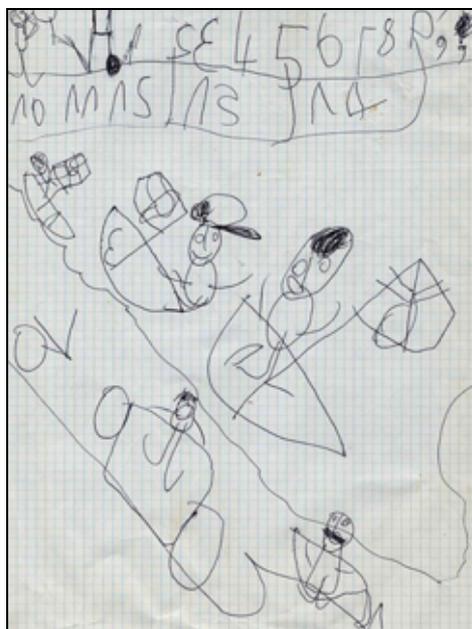
werden von Diskussionen darüber, um welche Auffassung von Mathematik und um welche Art von Unterricht es gehen soll.

Den Fragen zu Mathematik und Unterricht wird in den Kapiteln „Mathematik von Anfang an“ und „Mathematische Lernanlässe von VIER bis ACHT“ nachgegangen. Anschliessend befasst sich das Kapitel „Die Rolle der Lehrperson“ mit der Frage, wie Unterricht organisiert werden kann, um möglichst allen Kindern möglichst gerecht zu werden.

Mathematik von Anfang an

„Wann fängt die Mathematik an? Wenn ein Kind ein Dreieck von einem Quadrat, zwei von drei, drei von vier unterscheiden kann? Oder: wenn, während die Mutter geradeaus geht, das Kind um eine Buschanlage herumläuft, um am Ende die Mutter zu überraschen? Es hängt davon ab, wie bewusst es geschieht.“ (Freudenthal 1981, 100)

Das Wort „Mathematik“ beruht auf dem griechischen *manthanein*, das soviel heisst wie „erfahren, kennen lernen“. Die Welt um sich herum erfahren und in Worte oder Zahlen übersetzen, das tun Kinder von klein an: Beim Spielen, im sozialen Kontakt (Wie viele sind wir? Wie viele kommen noch?) beim Anziehen (Die Etikette muss hinten sein) beim Aufräumen (alle Stofftiere in die Truhe), beim Vorbereiten von Festen usw. – überall steckt auch Mathematik drin, allerdings nicht „Schulmathematik“, sondern eine informelle und unkonventionelle Mathematik.



Philip, 5 Jahre: Spielplan für ein Würfelspiel

Mathematik ist eine Tätigkeit

„Mathematik ist keine Menge von Wissen. Mathematik ist eine Tätigkeit, eine Verhaltensweise, eine Geistesverfassung...“ (Spiegel und Selter 2003, 48)

Ein dreijähriger Knabe zählt drei Luftballone: „eins – zwei – zweieins“ (für drei). Mit fünf kann er die Zahlwortreihe schon weit über 10 hinaus korrekt aufsagen. Dennoch zählt er: „ ... fünf – sechs – sie – ben – drei – zehn – vier – zehn – fünf – zehn“ und wiederholt diese Zählweise immer wieder, aber nur beim Ausmessen einer Länge mit Schritten.

Ein Jahr später kennt er die Zahlen bis 100. Aber beim Zählen lässt er wieder Zahlen aus. „Hast du eigentlich bemerkt, dass ich immer Zahlen auslasse?“ fragt er und ergänzt: „Und weisst du auch warum? Damit es schneller geht!“

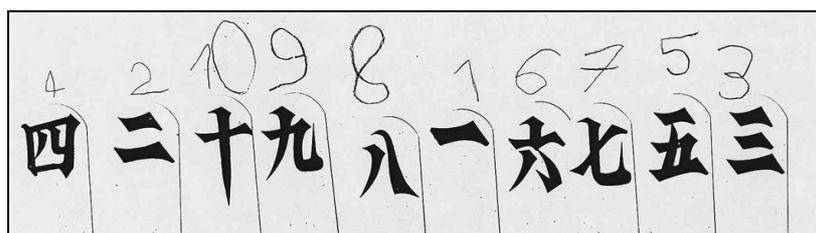
Mit drei Jahren hat der Knabe eine Eins-zu-eins-Zuordnung zwischen Gegenstand und Zahlwort hergestellt. Weil er aber erst zwei Zahlwörter kannte, musste er für „drei“ ein neues „konstruieren“. Mit fünf Jahren hatte er nicht etwa das Zählen oder die Eins-Eins-Zuordnung wieder verlernt – nein, er begann ein wichtiges Zählprinzip zu verstehen (jedem zu zählenden Element ein Zahlwort zuordnen). Aber er nahm die Regel zu genau: bei sie-ben tappte er *unbewusst* in die „Rhythmusfalle“ und machte zwei Schritte. Und dann blieb ihm nichts anderes übrig als die einsilbigen Zahlwörter von „acht“ bis „zwölf“ auszulassen. Auch später lässt er Zahlen aus, aber jetzt tut er dies *bewusst*. Und damit ist die Idee vom Zählen in Schritten und vom „Rechnen“ geboren.

Mathematik heisst: Beziehungen herstellen

„ ... das Entscheidende in der Mathematik (sind) nicht die einzelnen Objekte sondern die Beziehungen, die zwischen ihnen bestehen, die so genannten mathematischen Relationen.“ (Bombieri 2001, 191)

Ein Mädchen ruft in der Straßenbahn „Wir müssen weit fahren, das dauert aber lange!“ Ein anderes erzählt auf der Strasse: „Ich war heuer schon drei Mal im Prater – gestern, heute und mit dem Opa.“ Und der jüngere Bruder entgegnet: „Und ich war schon zweimal im Prater – das ist auch viel.“ Ein Knabe schneidet Papierstreifen und stöhnt: „Je feiner die Streifen, desto mehr muss ich arbeiten.“ Ein anderer schreibt eine Eins spiegelverkehrt, damit sie nach rechts „schauen“ kann. Und ein Mädchen findet, dass die 8 auf dem Türschild eine Doppeldrei ist.

Alle diese Kinder von vier bis acht stellen Beziehungen her: zwischen Weg und Zeit, zwischen dem Ganzen und seinen Teilen, zwischen Zahlen und zwischen Zahlzeichen. Die Symbole sind für sie noch eine Art Fabelwesen, die in einem „magischen Übergangsbereich“ zwischen Wirklichkeit und Papier leben.



Jonas, 5 Jahre: Zahlzeichen

Mathematik ist die Wissenschaft von den Mustern

„Abstrakte Muster bilden die eigentliche Essenz der Gedanken, der Kommunikation, aller Berechnungen, der Gesellschaft und des Lebens schlechthin.“ (Devlin 1998, 9)

Mathematik wird auch als Wissenschaft von den Mustern, d. h. von den Regelmäßigkeiten und den Gesetzmäßigkeiten verstanden, beginnend bei „einfach zugänglichen arithmetischen und geometrischen Mustern bis hinauf zu hochkomplexen, abstrakten Mustern.“ (Wittmann 2004)

Kinder sind von klein an fasziniert von Mustern:

- von geometrischen Mustern (immer abwechselnd rund und eckig),
- von akustischen Mustern (das Rattern mit einem Stäbchen dem Gartenzaun entlang),
- von Bewegungsmustern (immer hin und her),
- von Handlungsmustern (immer vor dem Schlafen gehen den Pyjama anziehen, dann Zähneputzen, dann die Gute-Nacht-Geschichte).
- von Zahlenmustern (jede zweite Stufe auslassen; immer zwei rote, zwei weiße Perlen auffädeln).

Das Schlüsselwort für das Erkennen, Erfinden und Fortsetzen von Mustern heißt „*immer*“.

Die Frage nach dem „*immer*“ legt den Grundstein für das verallgemeinernde Denken.

„Und wenn man herausgefunden hat wie es geht, dann ist es einfach“, sagt der achtjährige Jan, als er entdeckt nach welchem Muster die Zweier- und die Achterreihe, die Dreier- und die Siebenerreihe usw. zusammenhängen.

Mathematische Lernanlässe von VIER bis ACHT

Mit dem Zugang zur Mathematik im Kindergartenalter ist ein *spielerischer* gemeint, aber – und das ist kein Widerspruch – über *echte mathematische Aktivitäten*, nicht über vorgezogene Formalismen. Auch nicht über „Pseudoaktivitäten“ wie Lernspiele mit so genannter Selbstkontrolle (z.B. Bilder ausmalen), oder via Übungen, welche die Kinder mit lustigen Bildern anlocken wollen. Fremdkontrolle und trickreiche Überlistung sind nicht nur überflüssig, sie können auch fatale Folgen haben: „Verpackungen welcher Art auch immer verfälschen das Fach und behindern die richtige Einstellung zum Fach, was sich langfristig sehr schädlich auswirkt.“ (Wittmann 2004). Was aber sind mathematische Aktivitäten, die spielerisch und echt zugleich sein sollen? Dieser Frage werden wir weiter unten nachgehen.

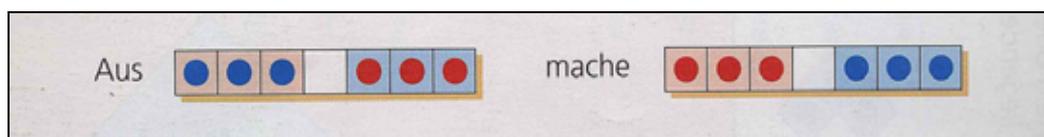
Mathematik lernen und lehren

Der Weg in die Welt der Zahlen und der Mathematik ist kein gleichförmiger oder geradliniger. Lernen hat viele Facetten. Das Lernen der Zahlwörter und der Zahlwortreihe beispielsweise basiert auf dem Nachmachen von Vorgemachtem, wobei das Prinzip „Zählen“ bereits im Menschen angelegt sein mag. Aber schon das „Basteln“ eines neuen Zahlwortes aus den bisher bekannten geht über das Nachmachen von Vorgemachtem hinaus. Neues Wissen knüpft an vorhergehendes an, verändert und verbessert dieses und führt wieder zu neuen und abermals fehlerhaften Versuchen – fehlerhaft bezogen auf die Norm, nicht auf das Denken des Kindes. Fehlversuche von kleinen Kindern im Umgang mit Zahlen sind meist kein Grund für Besorgnis, sondern ein Zeichen für einen neuen Entwicklungsschritt, über den sich die Erwachsenen freuen sollten.

Lehren heißt, das Lernen zu organisieren. Es geht darum, die Lernprozesse der Kinder wahrzunehmen, aufzugreifen, an sie anzuknüpfen und Lernanlässe anzubieten, in denen neue Lernprozesse in Gang gebracht und in Schwung gehalten werden. Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und des Lernen auf eigenen Wegen, wie es in den Schweizer Primarschulen immer häufiger praktiziert wird, ist wie geschaffen für den Kindergarten. Denn wie lernen Kinder in diesem Alter, wenn nicht spielerisch und aktiv-entdeckend zugleich?

Froschhüpfen – ein Beispiel für aktiv-entdeckendes Lernen

Wie aktiv-entdeckendes Lernen von „echter“ Mathematik im Kindergartenalter gehen könnte, soll am Beispiel des Strategiespiels „Froschhüpfen“ gezeigt werden (Die Denkschule, Teil 2).



Froschhüpfen (Spielen und Überlegen, Teil 2, S. 2)

Auf einem Spielplan mit 9 Feldern liegen links 4 blaue, rechts 4 rote Plättchen („Frösche“), in der Mitte ist ein Platz frei. Die roten und die blauen Plättchen sollen ihre Plätze tauschen, so dass am Schluss alle roten links, alle blauen rechts sind. Die Regel lautet:

Ein Plättchen darf auf einen benachbarten Platz verschoben werden, sofern dieser frei ist oder es darf über ein Plättchen hüpfen.

Gemeinsam probieren die Kinder das Spiel auf einem großen Spielplan aus. Die Lehrperson kann dabei überprüfen, ob die Regeln verstanden wurden. Es werden Fragen auftauchen wie: „Darf ein Plättchen auch rückwärts ziehen?“ oder „Muss man immer abwechselnd mit einem roten und einem blauen Plättchen ziehen?“

In der folgenden Erkundungsphase spielen die Kinder das „Froschhüpfen“ in kleinen Gruppen. Die Ausgangssituation kann variiert werden: Je nach individuellen Voraussetzungen der Kinder kann auch mit einer kleineren Anzahl Plättchen pro Seite begonnen werden.

Nach kürzerem oder längerem Probieren werden wohl alle das Ziel des Spiels erreichen. Einige werden sich damit bereits zufrieden geben, andere werden nochmals und nochmals spielen. Es wird Kinder geben, welche die Spielzüge zählen und fragen: „Geht es auch mit weniger Zügen?“ Und solche, die eine Strategie für die optimale Anzahl Spielzüge herausfinden wollen.

Ganzheitliche Förderung

Das „Froschhüpfen“ kann zum Einstieg oder auch zwischendrin mit Kindern als „Fröschen“ auf einem großen Spielplan auf dem Boden gespielt werden. „Schieben“ bedeutet auf ein freies Nachbarfeld rücken, „hüpfen“ heißt um einen Frosch herumgehen. Auch die Kinder, die nicht direkt mitspielen, haben eine wichtige Funktion: sie können den „Fröschen“ Anweisungen geben, die Züge beobachten, mitzählen und Strategien entwickeln. Die „Frösche“ haben diesen Überblick nicht, aber sie spüren, ob eine Strategie aufgeht oder nicht. Ruft ein Kind „Hilfe, ich bin eingeklemmt!“ so ist das ein Zeichen dafür, dass etwas schief gelaufen ist und Züge rückgängig gemacht werden müssen. Wenn schließlich alle „Frösche“ an den richtigen Plätzen stehen, ist die Freude groß.

„Mathematische Aktivitäten fordern und fördern nicht nur den Kopf, sondern auch das Wechselspiel zwischen Kopf, Auge, Sprache, Ohr, der Feinmotorik der Hände und der Grobmotorik des gesamten Körpers. Die mathematische Frühförderung muss auf dieses volle Spektrum von kognitiven und sozialen Fähigkeiten zielen. Wenn sie das tut, leistet sie einen wichtigen Beitrag zur Erziehung überhaupt“ (Wittmann 2004)

Mathematikunterricht im Kindergarten und in der Basisstufe strahlt demnach weit über das Fach hinaus aus. Allgemeine basale Fähigkeiten (z.B. Wahrnehmung, Raumerfahrung, serielle Leistung, Fein- und Grobmotorik) werden auch durch mathematische Tätigkeiten wie das Hantieren mit Materialien, das Erkennen von Würfelbildern, das Zusammensetzen von Formen, das Zeichnen von Mustern oder das Schreiben von Ziffern und Zahlen gefördert.

Mathematische Inhalte und deren Integration in den Tagesablauf

Im Zentrum der mathematischen Frühförderung stehen die Themenbereiche Arithmetik und Geometrie (zählen, Zahlen, Formen Muster und Operationen) sowie Sachsituationen (Zahlen und Formen in der Umwelt, alltägliche Probleme mathematisch lösen), begleitet von pränumerischen Aktivitäten wie Mengen- und Reihenbildung, Eins-zu-Eins-Zuordnung und Mengenerfassung (Details siehe Kasten). Viele dieser mathematischen Inhalte kommen im Tagesablauf vor. Sie stecken in „Mathematischen Lernanlässen nebenbei“, d.h. in Alltagsaktivitäten (sitzen im Kreis, zählen ob alle da sind usw.) oder im Freispiel (bauen, basteln, Rollenspiele usw.) aber auch in Themenkreisen wie Wald, Wasser usw. Mathematische Inhalte und Lernanlässe sollen aber auch ganz bewusst in Form von mathematischen Unterrichtssequenzen gestaltet werden (siehe Kasten).

In diesen speziellen mathematischen Sequenzen geht es darum, die Lernprozesse der Kinder so zu organisieren, dass jedes Kind auf Grund seiner individuellen Vorkenntnisse und seines Interesses Zugang zu mathematischen Aktivitäten findet. Dazu eignen sich besonders gut Spiele oder Aufträge, die ein breites Spektrum an Bearbeitung ermöglichen und neben Fähigkeiten wie Mengenerfassung, Zählen, Ziffern bzw. Zahlen lesen und schreiben auch charakteristische mathematische Denkweisen und Problemlösungsstrategien ermöglichen.

Ein solcher spezifischer mathematischer Lernanlass ist oben am Beispiel des Froschhüpfens geschildert worden. Weitere gehaltvolle Lernanlässe finden sich z.B. in folgenden Büchern: Das kleine Zahlenbuch 1 und 2, Das Zahlenbuch 1 und 2, Die Denkschule 1 und 2, Wir wollen Mathe spielen, Auf zum Matherhorn, 42 Denk- und Sachaufgaben, Schuh und Meter. (genaue Angaben siehe Literaturverzeichnis).

Die Rolle der Lehrperson

Was kommt auf die Lehrpersonen zu, die das Abenteuer Mathematik mit Kindern von vier bis acht zusammen erleben wollen? Wie können sie Kindern mit unterschiedlichsten Vorkenntnissen gerecht werden? Wie können sie alle Kinder auf die Anforderungen in der (weiteren) Schule und im Leben vorbereiten?

Neben einem mathematischen Wissen, das über den jeweiligen Schulstoff hinausgeht und neben der Kenntnis aktueller didaktischer Konzepte wird die Unterrichtsorganisation eine immer zentralere Rolle

spielen. Sie ist entscheidend, wie mit der Heterogenität der Kinder in Bezug auf ihre individuellen Vorkenntnisse umgegangen werden kann.

Unterrichtsorganisation

„Mathematische Lernanlässe nebenbei“ lassen sich problemlos in den Schulalltag integrieren. Es werden aber Fragen zur Organisation von mathematischen Lernanlässen in speziellen Lektionen auftauchen, insbesondere wenn es sich um heterogene Gruppen handelt. Also fast immer.

In der Praxis – und im Einklang mit der Didaktik des aktiv-entdeckenden Lernens – zeigt es sich, dass die Gliederung einer Sequenz in die drei Phasen „Gemeinsamer Einstieg – selbständige Erkundung in Gruppen – gemeinsame Reflexion“ sowohl für die Lehrpersonen wie auch für die Kinder praktikabel und ergiebig ist. Diese Form gibt der Lehrperson die nötige Ruhe und Zeit, um die Aktivitäten der Kinder zu beobachten und um Fragen aufzunehmen oder zu klären.

Greifen wir nochmals das Beispiel „Froschhüpfen“ auf: An die Erkundungsphase, in welcher die Kinder das Spiel in kleinen Gruppen ausprobieren, schließt die gemeinsame Reflexionsphase an. Sie gibt Gelegenheit zum Austauschen der Erfahrungen, zum Formulieren, Vermuten und Argumentieren. Zu diesem Zweck kann das Spiel nochmals gemeinsam auf einem großen Spielplan gespielt werden, wobei die Kinder die Züge sprachlich begleiten, z.B. „hüpfen– schieben – schieben ...“ oder „rot – rot– blau...“ Vielleicht gelingt es einigen Kindern, ein Bewegungs- oder Farbmuster zu entdecken, vielleicht werden günstige oder ungünstige Plättchenkonstellationen ausgemacht: „Wenn ich jetzt das rote schiebe, dann ...“ oder „Es wäre besser gewesen, wenn...“

Lernanlässe wie das Froschhüpfen lassen Bearbeitungen mit verschiedenem Tiefgang zu. Sie verlangen keine fertige Lösungen und keine formale Begründungen, aber sie regen an, Lösungen zu suchen und über verschiedene Wege zu reden. Sie sprechen Kinder an, die gerne spielen, aber noch kaum mit Zahlen umgehen, aber auch Kinder, die allmählich in die Welt der Zahlen einsteigen. Und erst recht die Kinder, welche die Zahlen schon gut kennen und sie gründlicher erkunden und erforschen wollen.

Individuelle Begleitung

Während der Gruppenaktivität kann die Lehrperson beobachten, welche Kinder unter- oder überfordert sind. Um sich diesen Kindern in Ruhe widmen zu können, kann sie auf eine in der Sonderpädagogik bewährte Unterrichtsorganisation zurückgreifen. Sie befasst die Mehrheit der Kinder mit Spielen bzw. Aufträgen, welche diese selbständig bearbeiten können. Eine Kindergärtnerin hat hierfür eine Ecke mit kleinen mathematischen Einzelspielen wie z.B. Tangram, Solitärspiele, Knobelspiele, „Spiegeln mit dem Spiegel“ (siehe Literaturverzeichnis) vorbereitet, die ruhig und für sich gespielt werden können. Jeden Monat kommt eine Neuheit hinzu. Eine andere Kindergärtnerin lässt die Kinder zu zweit oder in kleinen Gruppen vertraute Spiele oder bekannte Übungen machen. Anregungen dazu finden sich z.B. in der Denkschule 1 und 2 und in der Kartei „Mathematik mit geschlossenen Augen“ (siehe Literaturverzeichnis). Während dieser Zeit kann sich die Lehrperson Kindern mit speziellem Förderbedarf oder einer speziellen Begabung zuwenden.

Umgang mit Heterogenität

„Einer zählt schon bis 500, andere kennen das Würfelbild für zwei noch nicht.“ (Aussage einer Kindergärtnerin, die im Sprachheilkindergarten unterrichtet)

Kinder bringen nicht erst beim Eintritt in die Schule, sondern bereits beim Eintritt in den Kindergarten bzw. die Basisstufe ein sehr unterschiedliches Spektrum an individuellen Erfahrungen und Kenntnissen mit. Es gibt keine „Stunde Null“ für das Lernen. Jedes Lernen beginnt und verläuft fließend, so auch das Mathematiklernen.

Woher aber kommt das unterschiedliche Erfahrungsspektrum? Warum gibt es Kinder, die beim Anblick eines Würfels, der aus 1000 Perlen besteht, rufen „Hat der aber viele Kügelchen!“ und sofort zu zählen beginnen während andere staunen: „Oh, ist der schön!“ Warum gibt es Kinder, die schon früh Zahlen brauchen und solche die länger ohne Zahlen auskommen oder den Zahlen gar ausweichen? Ist der frühe Gebrauch von Zahlen eine Garantie für leichtes Lernen in der Primarschule, das Vermeiden von Zahlen hingegen ein Hinweis auf spätere Lernschwierigkeiten?

Rechenschwäche vorhersagen?

Die Forschung geht zurzeit intensiv der Frage nach, ob bereits im Kindergartenalter sogenannte Vorläuferfertigkeiten schulischer Mathematikleistungen identifiziert werden können. Untersuchungen von Kristin Krajewski hierzu zeigen: „Das mengen- wie das zahlenbezogene Vorwissen konnten als spezifische Vorläuferfertigkeiten schulischer Mathematikleistungen identifiziert (...) werden. Kinder, die im Kindergartenalter an den Aufgaben zum Mengen- und Zahlenvorwissen gescheitert sind, waren auch diejenigen, die später in der Schule Probleme im mathematischen Anfangsunterricht hatten und eine Rechenschwäche zeigten.“ (Krajewski 2003, 211)

Das Mengenvorwissen umfasst nach Krajewski die Seriation, den Mengenvergleich (hierher gehört auch das Verständnis der Zahlinvarianz) und Längenvergleiche. Das Zahlenvorwissen umfasst Zählfertigkeiten, „arabisches Zahlwissen“ (Zahlen in der Ziffernschreibweise) und Rechenfertigkeiten bezogen auf konkrete Situationen.

Die Diagnose „Gefährdung in Bezug auf Rechenschwäche“ im Kindergartenalter macht Sinn, wenn sie nicht zur bloßen Etikettierung, sondern zur raschen und nach Möglichkeit im Unterricht integrierten Unterstützung des betroffenen Kindes führt. Ob und in welchem Umfang aber Fördermaßnahmen in Bezug auf Mengen- und Zahlenvorwissen im Kindergartenalter „greifen“ und wodurch Kompetenzen im Mengenvorwissen erworben werden, ist Gegenstand von weiteren Studien.

Auf Grund der vorliegenden Studie von Kristin Krajewski liegt der Schluss aber nahe, dass es für die Prävention von späteren Lernschwierigkeiten wichtig ist, bei allen Kindern das Zählen und den Umgang mit Zahlen anzuregen und zu fördern (Inhalte siehe Kasten). Und nicht nur für die Prävention, sondern auch für die Förderung, wenn – wie z.B. bei Kindern im Sprachheilkindergarten – Lernschwierigkeiten bereits manifest sind: „Im Kleinen Zahlenbuch und in der Denkschule finden sich Möglichkeiten für alle, z.B. das Spiel „Voll besetzt“, um Anzahl, Zahlwort, Ziffer und Würfelbild zu kombinieren, oder anspruchsvolle Legespiele aus der Denkschule, um mathematisches Denken weiter zu entwickeln“ sagt die Kindergärtnerin und ergänzt: „Ich glaube, wir machen viel zu viel Mathematik, aber“ – fügt sie fast entschuldigend hinzu – „es macht allen Spass.“

Wird bei einem Kind im Schuleintrittsalter eine Lernschwäche beobachtet oder vermutet, so können seine Stärken und Schwierigkeiten anhand des Goldstückspieles aus dem „Heilpädagogischen Kommentar zum Zahlenbuch 1“ (Moser Opitz, Schmassmann 2002) differenziert erfasst werden. Spezielle sowie allgemeine Hinweise für die entsprechende Förderung finden sich ebenfalls im Heilpädagogischen Kommentar 1. Für Hinweise für die weitere Förderung betreffend den Stoff der zweiten Klasse kann der Heilpädagogische Kommentar 2 herangezogen werden. Durch die Gewichtung der jeweiligen Lerninhalte bieten die Kommentare zudem eine Hilfe für die Auswahl des Basisstoffes für das erste und zweite Schuljahr an.

Mathematische Begabungen erkennen?

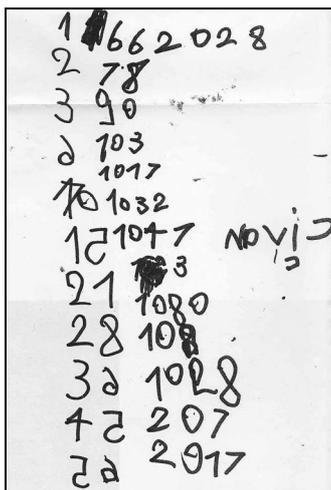
Gibt es mathematisch begabte Kinder im Kindergartenalter überhaupt schon? Und woran lässt sich in diesem Alter eine mathematische Begabung erkennen? Die folgenden Beispiele sprechen für sich: Jonas, Civan und Anna wurden von ihren jeweiligen Kindergärtnerinnen als mathematisch begabt eingeschätzt und konnten deshalb spezielle Förderkurse zusammen mit Kindern bis zur dritten Klasse besuchen. Was unterscheidet sie von Gleichaltrigen?

Jonas hat mit fünf Jahren (1. Jahr Kindergarten) alles „aufgesaugt“, was mit Zahlen in der Umwelt zu tun hat, z.B. Busfahrpläne, Jahrezahlen, Telefonnummern. Er hat die Bedeutung dieser Zahlen verstanden und in Beziehung zueinander und zu seinem Alltag setzen können. Er liebte aber auch er den Umgang mit abstrakten Zahlen. Die Summe der ersten 100 Zahlen wusste er mit sechs Jahren auswendig, weil er diese mit einer Rechenmaschine am Arbeitsplatz der Mutter ein halbes Jahr vorher herausgefunden hatte. Er kam aber auch dahinter, wie man die Summe viel einfacher bestimmen kann. Das Einmalseins, die Quadratzahlen und deren Umkehrung, das Wurzelziehen fand er mit sechs Jahren „einfach“. Beeindruckt hat ihn vor allem, dass es bei mathematischen Problemen häufig „mehrere Lösungen gibt“. Jonas kam vom Kindergarten direkt in die zweite Klasse und wurde von der Lehrerin und einem Mentor speziell gefördert. Mit acht Jahren war er vertraut mit speziellen Zahlen wie z.B. Primzahlen oder mit Dreieckszahlen² und deren Berechnung. Als er herausfinden wollte, ob eine bestimmte Zahl eine Dreieckszahl ist, brauchte er eine Einstiegshilfe. Mit dieser konnte er die selbst gestellte Aufgabe – formal eine quadratische Gleichung – durch Rückwärtsdenken intuitiv, unkonventionell und informell lösen. Kein Wunder, dass er am Ende der dritten Klasse den Primarschulstoff in Mathematik durchgearbeitet und verstanden hatte.

Ein anderes Beispiel: Der fünfjährige Civan (1. Jahr Kindergarten) hat Zahlen am liebsten losgelöst von alltäglichen Problemen betrachtet. Er war kaum zu bremsen, wenn es ums Zählen oder Rechnen ging. So konnte er die Summe in magischen Quadraten³ bestimmen, die Quadratzahlen bis 100 mühelos aufsagen und die Dreieckszahlen bis weit über 100 berechnen und aufschreiben. Dass dabei seine Hände vom Filzstift ganz rot verschmiert wurden, hat er gar nicht bemerkt. Er kam mit sechs Jahren in die erste Klasse, und dort hatte er hauptsächlich mit dem Ordnung Halten Mühe.

² Die „Dreieckszahlen“ (1), 3, 6, 10, 15 ... ergeben sich, wenn aus Plättchen gleichseitige Dreiecke figuriert werden; das geht eben mit 2 (Grundlinie) + 1 oder 3 + 2 + 1 oder 4 + 3 + 2 + 1 oder 5 + 4 + 3 + 2 + 1 Plättchen.

³ „Magische Quadrate“ sind Anordnungen von 3 mal 3 oder 4 mal 4 ... Zahlen, in welchen Quer-, Längs- und Diagonalsumme identisch sind.



Civan, 5 Jahre: Dreieckszahlen

Die sechsjährige Anna (2. Jahr Kindergarten) ist durch ein speziell gutes Zahlengedächtnis aufgefallen, lernte leicht und mit Vergnügen Zahlwörter in fremden Sprachen, z.B. auf Chinesisch, und konnte im Zahlenraum bis 100 Additionen und Subtraktionen ausführen. Sie griff Anregungen begeistert auf und arbeitete daran zu Hause weiter.

Universikum: Zahlen - Muster. Spielen, tüfteln und forschen mit Zahlen und Mustern

Was haben wir gemacht? Ich erinnere mich an:

Zahlen und Muster: DICHINESISCHENIA

Spiele: DAS MITLEN
DENSMARTIS

Rätsel: DAS SUCHSCHRAIL

Was noch? *www*

Wie ist es mir gegangen? ES IST MIR GUT BEGANGEN

Das war für mich einfach: *hinnen und draußen*

Anna, 6 Jahre: Kursrückblick

Alle drei Kinder verfügen zweifellos über ein mathematisches Interesse, das über den altersüblichen Umgang mit Zahlen hinausgeht.

Diesem Interesse mag eine besondere mathematische Begabung (siehe dazu z.B. Käpnick 1998 und Huser 2000) zu Grunde liegen, welche gepflegt und gefördert werden muss. Dazu brauchen diese Kinder echte inhaltliche Herausforderungen. Das bedeutet aber nicht, dass ihnen immer spezielle Themen angeboten werden müssen. Gute Lernanlässe zeichnen sich dadurch aus, dass sie Herausforderungen für alle, auch für begabte Kinder enthalten. Im weitern brauchen begabte Kinder rasch Zugang zu geeigneten „Werkzeugen“ für das Lösen von Problemen wie z.B. das systematische Erstellen von Listen, Tabellen und Diagrammen, das Ausschließen von Möglichkeiten, die Betrachtung von einfacheren Fällen oder von Spezialfällen, das Verallgemeinern.

Alle Begabungen fördern

Alle anderen Kinder brauchen die genannten Werkzeuge auch, aber nicht in so hohem Maß, nicht so früh und nicht so intensiv. Und alle anderen Kinder können sich auch bestimmte Problemlösungsstrategien aneignen, aber nicht so schnell und nicht so „besessen“.

Damit alle auf ihre Rechnung kommen, sollen „Lernumgebungen (...) flexible Lernangebote enthalten, die von unterschiedlichen Lernern auf je eigene Weise umgesetzt werden können. Jeder Lerner kann dabei seine individuellen Fähigkeiten weiterentwickeln.“ (Wittmann 2004). Viele Anregungen und Beispiele für solche binnendifferenzierenden Lernanlässe finden sich in „Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte“ von Elmar Hengartner (www.mathe-projekt.ch).

Mathematisch speziell Begabte sollen – genauso wenig wie Kinder mit Lernschwierigkeiten – ausgegrenzt werden. Auch sie sollen immer wieder Gelegenheit bekommen, ihre Entdeckungen vorzustellen, z.B. in der Reflexionsphase zu einem gemeinsamen Thema. Dabei profitieren alle und alle kommen durch den Austausch wieder auf neue Ideen und auf neue Fragen.

Zum Abschluss – aber nicht abschließend

Mathematik von VIER bis ACHT nimmt den Kindern die Kindheit nicht weg, sondern greift kindgerecht – aber nicht kindertümlich – auf, womit Kinder sich befassen.

Mathematik von VIER bis ACHT nimmt den anschließenden Schulstufen den Stoff nicht weg. Es bleibt noch genug Mathematik übrig – sogar fürs ganze Leben!

Mathematikunterricht von VIER bis ACHT bietet echte Mathematik an und lässt alle begabten Kinder daran teilhaben: die „schwach begabten“, die „normal begabten“ und die „speziell begabten“.

Aber auch diese drei Gruppen sind in sich nicht homogen. Die Übergänge sind fließend, die „Zuschreibung“ zu einer Gruppe beruht auf Momentaufnahmen, und die Zugehörigkeit muss oder darf nicht ein Schulleben lang dauern. Veränderungen und Überraschungen sind jederzeit möglich:

„Kinder denken anders, als wir Erwachsene denken,
anders als wir es vermuten, und anders als wir es gerne hätten.

Kinder denken aber auch anders als andere Kinder
und in manchen Situationen anders als in anderen,
obwohl sie im Prinzip dem gleichen Problem gegenüberstehen.“

(Spiegel und Selter 2003, 25)

Literatur:

Bauersfeld, Heinrich und O'Brien, Thomas: Mathe mit geschlossenen Augen. Zahlen und Formen erfühlen und erfassen. Eine Kartei. Verlag an der Ruhr, Mülheim an der Ruhr, 2002

Bombieri, Enrico: Warum ist $1 + 1 = 2$. In: Stieckel, Bettina (Hg): Kinder fragen, Nobelpreisträger antworten. S. 187- 195. Wilhelm Heyne Verlag, München 2002

Dahl, Kristin und Lepp, Mati: Wollen wir Mathe spielen? Oetinger, Hamburg 2000

Devlin, Keith: Muster der Mathematik. Ordnungsgesetze des Geistes und der Natur. Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg, Berlin 1998

Freudenthal, Hans: Kinder und Mathematik. In Grundschule 13.(1981) Heft 3, S. 100 - 102

Huser, Joëlle: Lichtblick für helle Köpfe. Lehrmittelverlag des Kantons Zürich, 1999

Käpnick, Friedhelm: Mathematisch begabte Kinder. Lang, Frankfurt / Main, 1998

Krajewski, Kristin: Vorhersage von Rechenschwäche in der Grundschule. Verlag Dr. Kovac, Hamburg, 2003

Moser Opitz, Elisabeth und Schmassmann, Margret: Heilpädagogischer Kommentar zum Zahlenbuch 1. Klett und Balmer, Zug 2002 (Nachdruck 2003)

Moser Opitz, Elisabeth und Schmassmann, Margret: Heilpädagogischer Kommentar zum Zahlenbuch 2. Klett und Balmer, Zug 2002 (leicht erweiterte Neuauflage 2004)

Müller, Gerhard N und Wittmann, Erich Ch.: Das Kleine Zahlenbuch 1. Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung, Seelze-Velber 2002

Müller, Gerhard N und Wittmann, Erich Ch.: Das Kleine Zahlenbuch 2. Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung, Seelze-Velber 2002

Müller, Gerhard N. und Wittmann, Erich Ch.: Spielen und Überlegen – Die Denkschule, Teil 1. Ernst Klett Grundschulverlag, Leipzig 1997

Müller, Gerhard N. und Wittmann, Erich Ch.: Spielen und Überlegen – Die Denkschule, Teil 2. Ernst Klett Grundschulverlag, Leipzig 1998

Rasch, Renate: 42 Denk- und Sachaufgaben. Wie Kinder mathematische Aufgaben lösen und diskutieren. Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung, programm mathe 2000, Seelze-Velber 2003

Reggio Children (Hg): Schuh und Meter. Wie Kinder im Kindergarten lernen. Die Kinder und das Maß. Beltz, Weinheim 2002

Schweingruber, Thomas: Auf zum Matherhorn. Spannende Mathematik für Kinder, Verlag Pestalozzianum, Zürich 2004

Spiegel, Hartmut und Selter, Christoph: Kinder & Mathematik. Was Erwachsene wissen sollten. Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung, Seelze-Velber, 2003

Spiegel, Hartmut: Spiegeln mit dem Spiegel, Ernst Klett Grundschulverlag, Leipzig 1996

Wittmann, Erich Ch., Müller, Gerhard N. et al / Hengartner, Elmar und Wieland, Gregor (Hg der Schweizer Ausgabe): Das Zahlenbuch 1. Klett und Balmer, Zug 1995

Wittmann, Erich Ch., Müller, Gerhard N. et al / Hengartner, Elmar und Wieland, Gregor (Hg der Schweizer Ausgabe): Das Zahlenbuch 2. Klett und Balmer, Zug 1996

Wittmann, Erich Ch.: Design von Lernumgebungen zur mathematischen Frühförderung. In Faust, G., Götz, M., Hacker, H. u.a. (Hg.): Anschlussfähige Bildungsprozesse im Elementar- und Primarbereich. Klinkhardt, Bad Heilbrunn 2004 (wird demnächst erscheinen)

MATHEMATISCHE INHALTE	BEISPIELE FÜR MATHEMATISCHE LERNANLÄSSE	
	So nebenbei, integriert in Alltag, Umwelt, Spiele/Spielen, fächerübergreifende Themenkreise	Ganz bewusst organisiert als mathematische Unterrichtssequenz
Pränumerischer Bereich Klassifikation (Mengenbildung) Seriation (Reihenbildung) Eins-zu-Eins-Zuordnung mit Gegenständen Eins-zu-Eins-Zuordnung in Verbindung mit Zahlwörtern	Spielsachen aufräumen Bauen mit Klötzen Mantel an Haken Gesellschaftsspiele	Spiele wie „Voll besetzt“ ⁴
Mengenerfassung Würfelbilder Erfassung ungeordneter Mengen (simultan, quasimultan) Mengenvergleich durch Eins-zu-Eins-Zuordnung	Würfelspiele Kindergartenjause: Tisch decken Gruppenbildung Gesellschaftsspiele	Spiele wie „Voll besetzt“ Rio ⁵ „Anzahl ertasten“ ⁶
Zählen Zahlwort und Zahlwortreihe Zählen von Objekten Verbindung Zahlwort und Objekt, letztes Zahlwort = Anzahl Mengenvergleich mit Zahlen (grösser, kleiner, gleich) Anzahl Objekte strukturiert erfassen	Verse und Lieder Wie viele sind wir? Guppenbildung (wo sind mehr?) Anzahl von Spielsteinen erfassen	„Ich kann zählen“, „Zähl doch mal“, „Wie viele?“ ¹ Zählwerkstatt: Punktemuster, Verpackungsmaterial mit Vertiefungen usw. zählen, Zählstrategien vergleichen, Anzahlen als Punktemuster zeichnen
Zahlen Zahlenschreibweise, Ziffern Zahlbeziehungen Zahlenmuster und Gesetzmäßigkeiten (z.B. gerade und ungerade Zahlen, immer zwei auslassen)	Geschichten mit Zahlen Alter, Anzahl Geschwister Hausnummern Sich aufstellen in der Zweierreihe	Spiele: Rio, Wettflug ² Geschriebene Zahlen suchen auf Verpackungen, im Zimmer, Strategiespiele: 10 gewinnt (Rot gegen blau) ⁷ , Froschhüpfen ⁸
Operationen Zahlzerlegung Situationen zu den 4 Grundoperationen	Gruppenzusammensetzungen kommen, gehen, verteilen, aufteilen, austeilen	Plättchen werfen (3 rot, 2 blau) Spiele: Gib - nimm ⁹ Geschichten erzählen, in denen quantitative Veränderungen vorkommen. Geschichten nachspielen, zeichnen, mit Zahlen in Tabellen eintragen
Raum Räumliche Beziehungen Formen Geometrische Muster und Gesetzmäßigkeiten	Aufräumen (auf, in, unter, neben...) Aufstellen im Kreis, laufen in der Reihe Dekorationen herstellen	Formen zeichnen, schneiden, falten Regelmäßige Muster erkennen, fortsetzen, herstellen, abzeichnen, erfinden, „Muster legen“ ¹ , Spiegeln ¹⁰
Sachsituationen Zahlen und Formen in der Umwelt Alltägliche Probleme mathematisch lösen Vergleichen und messen	Geburtstag: verteilen, aufteilen Spielkarten austeilen Thema Wald: Umfang von Bäumen vergleichen Geld	Erlebnisse erzählen, in denen Zahlen und Formen vorkommen Alltägliche Probleme nachspielen, nachlegen, Lösungen suchen Längenvergleiche anstellen, Zimmer ausmessen

⁴ Das Kleine Zahlenbuch¹⁵ Ravensburger Spiele⁶ Mathe mit geschlossenen Augen⁷ Das Kleine Zahlenbuch¹⁸ Die Denkschule, Teil 1⁹ diverse Hersteller¹⁰ Spiegeln mit dem Spiegel